Optimización

Extremos relativos de funciones de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región D y sea (a, b) un punto de D. Se dice que

- $f(a, b)$ es un valor máximo relativo o local (o simplemente $f(a, b)$ es un máximo relativo) de f en D si existe un disco B de centro (a, b) contenido en D de manera que $f(a, b) > f(x, y)$ para cualquier (x, y) en B;
- Si se invierte la desigualdad, $f(a, b)$ es un mínimo relativo o local de f en D;
- Si en un entorno de (a, b) se cumple una desigualdad y en otro la opuesta, $f(a, b)$ no puede ser un extremo; el punto $(a, b, f(a, b))$ se llama punto de silla o puerto;
- (a, b) es un punto crítico de f en D si se cumple una de las condiciones siguientes
    - (a, b) está en la frontera o contorno de D: en ese caso (a, b) es un punto frontera
    - $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, es decir $f'_x(a, b) = 0$ y $f'_y(a, b) = 0$: en ese caso (a, b) es un punto estacionario
    - no existen $f'_x(a, b)$ o $f'_y(a, b)$: en ese caso (a, b) es un punto singular

TEOREMA sobre localización de los extremos relativos: Si $f(a, b)$ es un extremo relativo de f en una región abierta (no contiene a su frontera), entonces el punto (a, b) es un punto crítico de f; puesto que (a, b) no está en la frontera debe ocurrir o bien que sea estacionario o bien que sea singular.

IMPORTANTE:

- Si f es diferenciable en D, los extremos relativos se alcanzan necesariamente sobre puntos estacionarios. Si éstos no existen (el gradiente no se anula nunca en D), entonces la función no tiene extremos relativos.
- Todos los extremos de una función diferenciable se alcanzan sobre puntos estacionarios, pero no todos los puntos estacionarios conducen a valores extremos: observa por ejemplo que $(0, 0)$ es un punto estacionario de $f(x, y) = y^2 - x^2$ pero $(0, 0, 0)$ no es ni punto de máximo ni de mínimo, sino un punto de silla.

Búsqueda de extremos relativos de funciones de dos variables

Partimos de una función f diferenciable en D; si (a, b) es un punto estacionario de f, la fórmula de Taylor de segundo orden será

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = \frac{1}{2} d^2 f + R_2$$

donde

$$d^2 f = f''_{xx}(a, b)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(a, b)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(a, b)\Delta y^2$$

Puesto que R_2 es un infinitésimo de orden superior a $d^2 f$ cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$, el signo de Δz es el mismo que el de $d^2 f$. En esto se basa este método, pues dado que la función alcanza un extremo en un punto estacionario si en ese punto el signo de Δz se mantiene constante para cualesquiera valores de Δx y Δy, esto equivale a que el signo de $d^2 f$ se mantenga constante:

- Si $d^2 f > 0$ para cualesquiera valores de Δx y Δy entonces la función alcanza un mínimo en ese punto
- Si $d^2 f < 0$ para cualesquiera valores de Δx y Δy entonces la función alcanza un máximo en ese punto

Podemos manipular la expresión de $d^2 f$ para escribirla como

$$d^2 f = \frac{1}{f''_{xx}} \left[(f''_{xx}\Delta x + f''_{xy}\Delta y)^2 + (f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2)\Delta y^2 \right]$$

Observa que

$$f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = H$$

es el determinante de la matriz hessiana, que se llama hessiano. Con esta notación la última expresión para $d^2 f$ se escribe como

$$d^2 f = \frac{1}{f''_{xx}} \left[(f''_{xx}\Delta x + f''_{xy}\Delta y)^2 + H\Delta y^2 \right]$$

expresión de la que puede concluirse que

- si $H > 0$ y $f''_{xx} > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo
- si $H > 0$ y $f''_{xx} < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo
- si $H < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un punto de silla
- si $H = 0$, hay que proseguir el estudio.

Extremos condicionados de funciones de dos variables

Un extremo (máximo o mínimo) de la función $f(x,y)$ cuando (x,y) está sobre una curva del plano contenida en el dominio de f, cuya ecuación es $g(x,y)=0$, se dice que es un extremo de f condicionado a la condición o restricción $g(x,y)=0$. El método de Lagrange permite hallar analíticamente los puntos extremos condicionados de una función suave, es decir, con derivadas parciales continuas.

TEOREMA de Lagrange para funciones de dos variables y una condición: Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones con derivadas parciales continuas tal que f tiene un máximo o mínimo sujeto a la restricción dada por $g(x,y)=0$, entonces ese extremo se produce en uno de los puntos críticos de la función $F(x,y,\lambda)$ dada por

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

Al número λ se le llama multiplicador de Lagrange.

El método de los multiplicadores de Lagrange, a un nivel muy básico, consiste en

- buscar los puntos estacionarios de F resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} F'_x=0 \\ F'_y=0 \\ F'_\lambda=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} f'_x+\lambda g'_x=0 \\ f'_y+\lambda g'_y=0 \\ g(x,y)=0 \end{array}\right\}$$

- analizar si cada punto estacionario obtenido de ese sistema es un extremo y cuál es su caracter (máximo o mínimo) estudiando el signo de la diferencial segunda de F,

$$d^2F(x,y,\lambda)=F''_{xx}\,dx^2+2F''_{xy}\,dx\,dy+F''_{yy}\,dy^2$$

  con la condición de que dx y dy estén ligados entre sí por la ecuación

$$g'_x\,dx+g'_y\,dy=0$$

  La función $f(x,y)$ tendrá un máximo condicionado si $d^2F<0$ y tendrá un mínimo condicionado si $d^2F>0$.

Extremos absolutos de funciones de dos variables

Sea $z=f(x,y)$ una función definida en una región D y sea (a,b) un punto de D. Se dice que $f(a,b)$ es el valor máximo absoluto (o simplemente $f(a,b)$ es máximo absoluto) de f en D si $f(a,b)\geq f(x,y)$ para cualquier (x,y) en D. Si se invierte la desigualdad, $f(a,b)$ es el mínimo absoluto de f en D.

TEOREMA de Weierstrass: Si la función $f(x,y)$ es continua en la región D, que es acotada y contiene a su frontera, entonces la función f alcanza sus valores mínimo y máximo absolutos en D.

En general, la búsqueda de extremos absolutos puede hacerse siguiendo los siguientes pasos:

- Hallar los extremos relativos de la función en el interior del conjunto. Si la función es diferenciable, este paso consistirá en hallar los puntos estacionarios de la función en el interior del conjunto y analizar si son extremos y de qué tipo.
- Buscar los extremos de la función sobre la frontera del conjunto.
- Comparar los valores de los extremos relativos encontrados en cada una de las fases anteriores, el mayor de los máximos relativos será el máximo absoluto y el menor de los mínimos será el mínimo absoluto.