Derivación compuesta

Respecto de una variable independiente

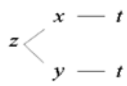
Sea $z = f(x,y)$ una función diferenciable en un dominio D, siendo cada una de las variables x e y funciones de la variable t:

$$x = x(t)\ ,\ \ y = y(t)$$

cumpliendo que existen las derivadas $x'(t)$, $y'(t)$; entonces la función $z = f(x(t), y(t))$ es derivable y se cumple que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Para recordar más fácilmente esta fórmula podemos tener en cuenta el siguiente gráfico de dependencia siguiente:



Respecto de dos variables independientes

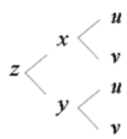
Sea $z = f(x,y)$ una función diferenciable en un dominio D, siendo cada una de las variables x e y funciones de otras variables u y v:

$$x = x(u,v)\ ,\ \ y = y(u,v)$$

cumpliendo que existen las derivadas parciales x'_u, x'_v, y'_u, y'_v; entonces la función $z = f(x(u,v), y(u,v))$ admite derivadas parciales y se cumple que

$$z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u\ \ ,\ \ z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v$$

En este caso el gráfico de dependencia es:



Implícita respecto de una variable independiente

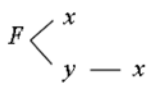
TEOREMA de la función implícita: La ecuación $F(x,y) = 0$ define en un entorno del punto $P(a,b)$ a la variable y como función implícita de x, es decir $y = f(x)$, si $F(a,b) = 0$, las derivadas parciales $F'_x(x,y)$ y $F'_y(x,y)$ son continuas en un entorno de $P(a,b)$ y $F'_y(a,b) \neq 0$

TEOREMA sobre la derivación implícita: Si la ecuación $F(x,y) = 0$ define en un entorno del punto $P(a,b)$ a la variable y como función implícita de x, siendo $F'_y(a,b) \neq 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx}(a) = -\frac{F'_x(a,b)}{F'_y(a,b)}$$

$$F(x,y)=0 \ \rightarrow\ \frac{d}{dx}F(x,y(x))=0 \ \rightarrow\ F'_x + F'_y\frac{dy}{dx}=0$$

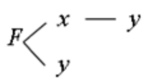
Si $F'_y \neq 0$



Obviamente este teorema se puede escribir intercambiando los papeles de x y de y:

$$F(x,y)=0 \ \rightarrow\ \frac{d}{dy}F(x(y),y)=0 \ \rightarrow\ F'_x\frac{dx}{dy} + F'_y=0$$

Si $F'_x \neq 0$



Implícita respecto de dos variables independientes

TEOREMA de la función implícita: La ecuación $F(x,y,z)=0$ define en un entorno del punto $P(a,b,c)$ a la variable z como función implícita de x e y, es decir $z=f(x,y)$, si $F(a,b,c)=0$, las derivadas parciales $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ y $F'_z(x,y,z)$ son continuas en un entorno de $P(a,b,c)$ y $F'_z(a,b,c)\neq 0$.

TEOREMA sobre la derivación implícita: Si la ecuación $F(x,y,z)=0$ define en un entorno del punto $P(a,b,c)$ a la variable z como función implícita de x e y, siendo $F'_z(a,b,c)\neq 0$, entoncees

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)=-\frac{F'_x(a,b,c)}{F'_z(a,b,c)} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=-\frac{F'_y(a,b,c)}{F'_z(a,b,c)}$$

.