Derivabilidad de funciones de varias variables

Derivadas parciales

Definición(Derivada parcial respecto de x).- Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, se define la derivada parcial de f en el punto (a, b) con respecto a x como:

$$f'_x(a,b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$$

siempre que ese límite exista.

Definición(Derivada parcial respecto de y).- Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, se define la derivada parcial de f en el punto (a, b) con respecto a y como:

$$f'_y(a,b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

siempre que ese límite exista.

NOTACIÓN:

$$f'_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad , \quad f'_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Las derivadas parciales no son más que derivadas de una función de una variable:

- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: la derivada parcial de $z = f(x, y)$ respecto de x en el punto (a, b) es la derivada de la función $g(x) = f(x, b)$; la curva $z = g(x)$ es la intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano vertical $y = b$ y la pendiente de esta curva en el punto $(a, b, f(a, b))$ es la derivada parcial $f'_x(a, b)$; paralelamente, $f'_y(a, b)$ es la pendiente en el punto $(a, b, f(a, b))$ de la curva $z = h(y) = f(a, y)$ intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano vertical $x = a$.
- USO PRÁCTICO: a efectos de cálculo, son aplicables las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable.

Derivadas parciales de segundo orden

Si una función $z = f(x, y)$ admite derivadas parciales en puntos de un cierto dominio, podemos considerar las nuevas funciones $f'_x(x, y)$ y $f'_y(x, y)$ y a su vez sus derivadas parciales, que serán cuatro:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xx} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yx} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yy}$$

TEOREMA de Schwarz: Si para la función $z = f(x, y)$ definida en D existen f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} y además f''_{xy} es continua en D, entonces

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) \;\; \forall (x,y) \in D$$

Derivadas direccionales

Definición(Dirección en el plano).- Una dirección en $\mathbf{R}^2$ es cualquier vector de norma 1.

IMPORTANTE: Si $\mathbf{u}$ es una dirección en el plano entonces se puede expresar como

$$\mathbf{u} = (\cos\phi, \mathrm{sen}\phi)$$

siendo ϕ el ángulo que forma el vector con el eje $0X$ positivo.

Definición(Derivada direccional).- Se define la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en el punto (a, b), en la dirección de $\mathbf{u} = (\cos\phi, \mathrm{sen}\phi)$ como el valor del siguiente límite en el caso de que exista:

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\cos\phi, b + h\mathrm{sen}\phi) - f(a,b)}{h}$$

La derivada direccional es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano vertical que contiene a la dirección dada.

Diferencial y diferenciabilidad

Definición(Función diferenciable).- Dada la función $z=f(x,y)$ definida y acotada en un dominio D, al cual pertenece el punto (a,b), existiendo las derivadas parciales de f en dicho punto, se dice que f es diferenciable en (a,b) si el incremento total $\Delta z=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)$ correspondiente a los incrementos arbitrarios Δx e Δy se puede expresar como

$$\Delta z=f'_x(a,b)\Delta x+f'_y(a,b)\Delta y+\epsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

cumpliendo que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\epsilon(\Delta x,\Delta y)=0$$

Definición(Diferencial de una función).- A la parte lineal en Δx e Δy de la expresión anterior se le llama diferencial de $z=f(x,y)$ en el punto (a,b) y se denota por dz:

$$dz=f'_x(a,b)dx+f'_y(a,b)dy$$

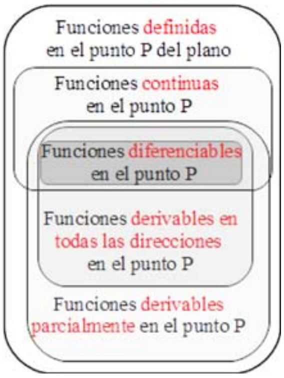
CONDICIÓN NECESARIA DE DIFERENCIABILIDAD: Si la función $z=f(x,y)$ es diferenciable en el punto (a,b) entonces $z=f(x,y)$ es continua en el punto (a,b).

CONDICIÓN SUFICIENTE DE DIFERENCIABILIDAD: Si la función $z=f(x,y)$ y una o las dos derivadas parciales primeras de f son continuas en un entorno del punto (a,b), entonces $z=f(x,y)$ es diferenciable en el punto (a,b).

EXISTENCIA Y CÁLCULO DE LAS DERIVADAS DIRECCIONALES: Si la función $z=f(x,y)$ es diferenciable en el punto (a,b), entonces existe la derivada direccional en (a,b) para cualquier dirección $\mathbf{u}=(\cos\phi,\mathrm{sen}\phi)$ y es

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b)=f'_x(a,b)\cos\phi+f'_y(a,b)\mathrm{sen}\phi$$

IMPORTANTE: Como pretende mostrar el siguiente esquema, una función de dos variables puede ser derivable en todas las direcciones y no ser continua; si es diferenciable sí es continua (condición necesaria anterior) y existen derivadas direccionales en todas las direcciones:



Gradiente

Definición(Gradiente).- Si $z=f(x,y)$ es una función de dos variables se define el gradiente de f en el punto (a,b) como el vector

$$\nabla f(a,b)=(f'_x(a,b),f'_y(a,b))$$

Con esta notación, si la función f es diferenciable, la derivada direccional se escribe como

$$D_{\mathbf{u}}f(a,b)=f'_x(a,b)\cos\phi+f'_y(a,b)\mathrm{sen}\phi=\nabla f\cdot\mathbf{u}$$

En base a esto, si la función f es diferenciable, el vector gradiente de f en (a,b) tiene las siguientes propiedades

- Si es nulo, entonces todas las derivadas direccionales de f en (a,b) son nulas.
- La dirección de máximo crecimiento de f es $\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$. El valor máximo que pueden tomar las derivadas direccionales es $|\nabla f(a,b)|$.
- La dirección de máximo decrecimiento de f viene dada por $-\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$. El valor mínimo que pueden tomar las derivadas direccionales es $-|\nabla f(a,b)|$.
- El vector gradiente en (a,b) es normal a la curva de nivel de valor $f(a,b)$.