

Conceptos básicos sobre funciones de dos variables

Se relacionan a continuación los conceptos básicos sobre funciones de varias variables, escribiéndolos para funciones de dos variables independientes; para funciones de más de dos variables la generalización es obvia.

- Función real de dos variables, f : es una correspondencia que asigna a cada pareja (x, y) de números reales otro número real único $f(x, y)$.
- Dominio de la función f : Se define el dominio D de la función f como el conjunto de pares reales en los que la función está definida.
- Rango o imagen de f : se llama así al conjunto de números reales dado por

$$\text{Im}f = \{f(x, y) \in \mathbf{R} / (x, y) \in D\}$$

- Gráfica de la función $f(x, y)$ definida en D : es el conjunto en el espacio \mathbf{R}^3 de todos los puntos de la forma $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in D$.
- Representación gráfica de f : es el trazado o dibujo de los puntos de la gráfica de $f(x, y)$. Esta gráfica puede ser interpretada geoméricamente como una superficie en el espacio.
- Curva de nivel: Para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, la curva de nivel de valor k es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano XY tales que su imagen es el valor k .
- Curva de contorno de altura k : es la intersección entre la gráfica de $z = f(x, y)$ y el plano $z = k$; así la curva de nivel de valor k es la proyección en el plano XY de la curva de contorno de altura k .
- Límite: Diremos que el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) se aproxima al punto (a, b) es L si para cualquier ϵ positivo existe un número δ positivo tal que los valores que toma f en un círculo de radio δ (centrado en (a, b)) distan como mucho ϵ de L :

$$d((x, y), (a, b)) < \delta \Rightarrow d(f(x, y), L) < \epsilon$$

IMPORTANTE: Cuando deseábamos conocer si una función de una variable tenía límite, únicamente debíamos estudiar los dos sentidos de aproximación (por una misma dirección); sin embargo cuando se trata de analizar el límite de una función de dos o más variables, la aproximación al punto puede hacerse por infinitas direcciones, pudiendo existir diferentes límites según la dirección de acercamiento al punto: en ese caso, se dice que no existe el límite en ese punto.

- Continuidad de una función: una función $z = f(x, y)$ es continua en un punto (a, b) de su dominio si

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

IMPORTANTE: Puesto que los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades con respecto a la suma, sustracción, producto y cociente que las que poseen las funciones de una variable, se deduce que son continuas la suma, el producto y el cociente de funciones continuas (en este último caso siempre que no se divida por cero); así mismo, es continua la función compuesta de dos funciones continuas.