Teoremas

Definición (Valor medio).- Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces el valor medio de f en este intervalo se define como:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

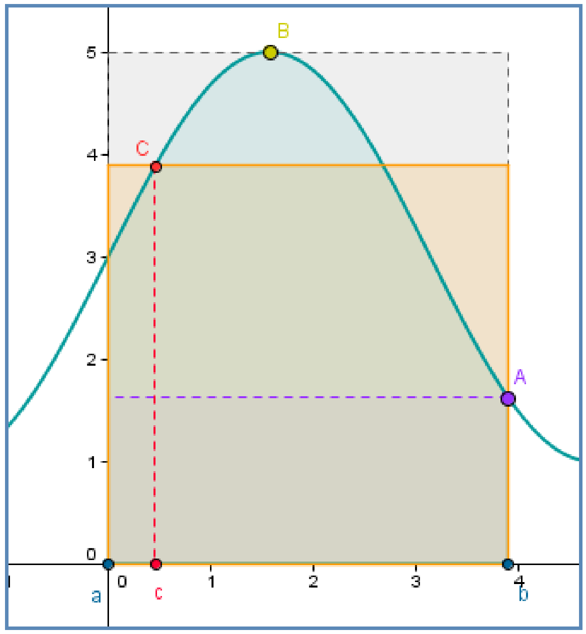
El valor medio de una función de variable continua, constituye una generalización de la media aritmética de n números.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO.- Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces existe un número c comprendido entre a y b tal que

$$\int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$$

El valor medio verifica $\mu = f(c)$, es decir que se trata de un valor que toma la función en algún punto de $[a,b]$.

Este teorema tiene una interpretación geométrica sencilla: ”El área limitada por la curva en el intervalo $[a,b]$ es igual a la de un rectángulo de base igual a la amplitud del intervalo y de altura igual a la ordenada de la curva en un punto de dicho intervalo”.

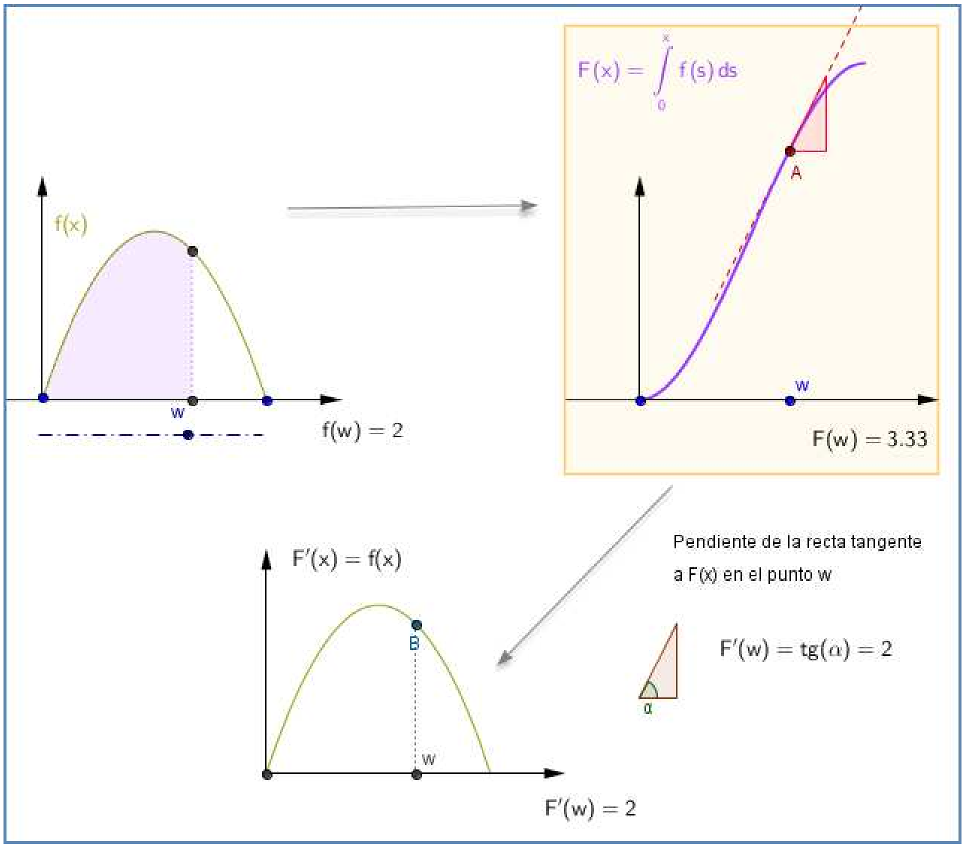


El siguiente teorema relaciona estrechamente conceptos aparentemente tan dispares como el de primitiva e integral definida de una función continua y, a partir de él se obtiene un procedimiento sencillo para calcular integrales definidas sin usar límites de sumas.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.- Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces, la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{con } \ x \in [a,b]$$

es derivable en dicho intervalo verificándose $\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

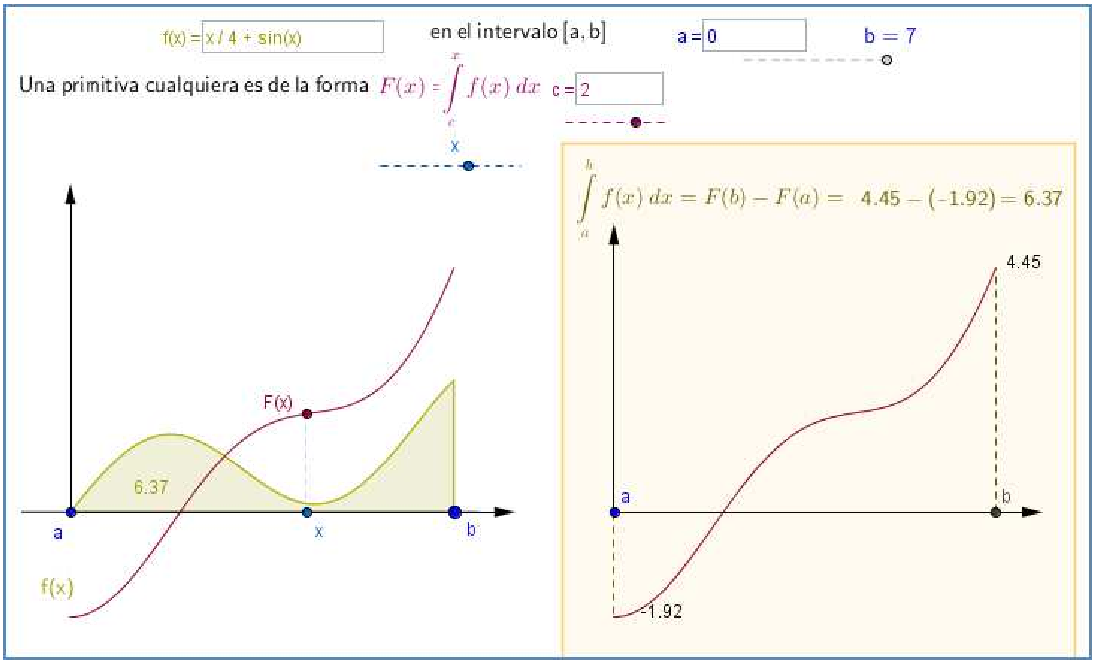


El teorema fundamental es una nueva forma de definir funciones no elementales y permite, además, demostrar la Regla de Barrow que servirá como regla práctica para calcular integrales definidas.

REGLA DE BARROW: Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

donde $G(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$.


f(x) = x / 4 + sin(x)
en el intervalo [a, b]
a = 0
b = 7
Una primitiva cualquiera es de la forma $F(x) = \int_c^x f(x)\,dx$
c = 2
x
$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =$ 4.45 − (-1.92) = 6.37
F(x)
6.37
a
x
b
f(x)
4.45
-1.92