



TEMA Integración de funciones de una variable

Sumas de Riemann

Dado un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, se llama **partición** de $[a, b]$ a un conjunto de puntos entre a y b

$$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

que divide $[a, b]$ en n subintervalos

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

Se utiliza la siguiente notación

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

y se llama **norma de la partición** al número

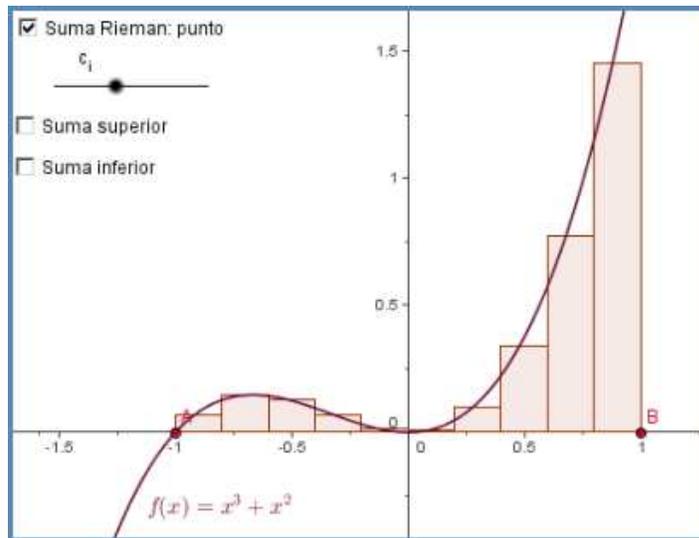
$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

es decir, a la longitud del intervalo más largo.

Consideramos ahora una función $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$. Supondremos que $f(x)$ está acotada en $[a, b]$. Una **suma de Riemann** de $f(x)$ para la partición P es un valor obtenido de la forma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

siendo c_i un punto entre x_{i-1} y x_i , para cada i entre 1 y n .



Cuestión: ¿Cuántas sumas de Riemann existen de una misma función sobre una misma partición?

Una vez construida la suma de Riemann, diremos que $f(x)$ es integrable según Riemann en $[a, b]$ si existe el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Si este límite existe se le llama integral definida (según Riemann) de $f(x)$ en $[a, b]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Importante: Si $f(x)$ es positiva, cada uno de los sumandos $f(c_i) \Delta x_i$ es el área del rectángulo de base Δx_i y altura $f(c_i)$, de forma que la suma de Riemann proporciona una aproximación del área que queda bajo la curva $y = f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$.

[Material interactivo](#)

- Laboratorio Sumas de Riemann