Integral impropia

De primera especie

Si una función f es integrable en cada intervalo de la forma $[a, R]$ para cualquier $R \geq a$ se define

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

.

Se dice que la integral impropia es

- **convergente** si el límite es finito
- **divergente** si el límite es finito
- **oscilante** si el límite es no existe

De manera análoga se puede definir la integral impropia cuando el intervalo de integración es $[-\infty, b]$ o $[-\infty, \infty]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1\to\infty} \int_{-R_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{R_2\to\infty} \int_{c}^{R_2} f(x)\,dx$$

De segunda especie

Si una función f es integrable en cada intervalo de la forma $[a+\epsilon, b]$ para $0 < \epsilon < b-a$ pero no acotada en $[a, b]$. Entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Se dice que la integral impropia es

- **convergente** si el límite es finito
- **divergente** si el límite es finito
- **oscilante** si el límite es no existe

De manera análoga se puede definir la integral impropia cuando no hay acotación en el extremo superior o en ambos extremos del intervalo:

- Si f es integrable en $[a, b-\epsilon]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

- Si f es integrable en $[a+\epsilon_1, b-\epsilon_2]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{a+\epsilon_1}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_c^{b-\epsilon_2} f(x)\,dx$$

Material interactivo

- Ejercicio: Área de una región infinita. Ejemplo 1
- Ejercicio: Área de una región infinita. Ejemplo 2