GieMATic — Grupo de Investigación Educativa — MATerial Interactivo de Cálculo

TEMA
Integración de funciones de una variable

Aplicaciones: Volúmenes

La integral definida puede utilizarse para calcular el volumen de sólidos que respondan a ciertas reglas de generación. Es el caso de los sólidos que tienen una sección transversal conocida.

Supongamos por ejemplo que el sólido H cumple que la sección transversal perpendicular al eje $0Y$ tiene área conocida: para cada $y_0 \in [a,b]$, sea $A(y_0)$ el área de la sección de H para el plano $y = y_0$. Entonces el volumen de H viene dado por

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(y)\,dy \tag{1}$$

Obtención de esta fórmula.

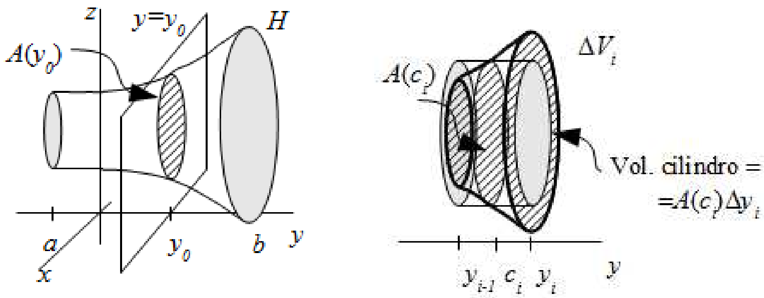
Empezamos tomando una partición del intervalo

$$[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [y_{i-1}, y_i] \quad , \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$$

y llamando ΔV_i al volumen de la parte (podríamos decir "rebanada") de H correspondiente al subintervalo $[y_{i-1}, y_i]$, de forma que

$$\text{volumen total} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

Ahora es preciso aproximar cada ΔV_i. Para ello se utilizará el volumen de un cilindro. ¿Qué dimensiones va a tener este cilindro? Una claramente es $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, pero ¿cuál es la base? La base del cilindro es la sección de H correspondiente a $y = c_i$, siendo c_i un punto intermedio a y_{i-1} e y_i.



Así

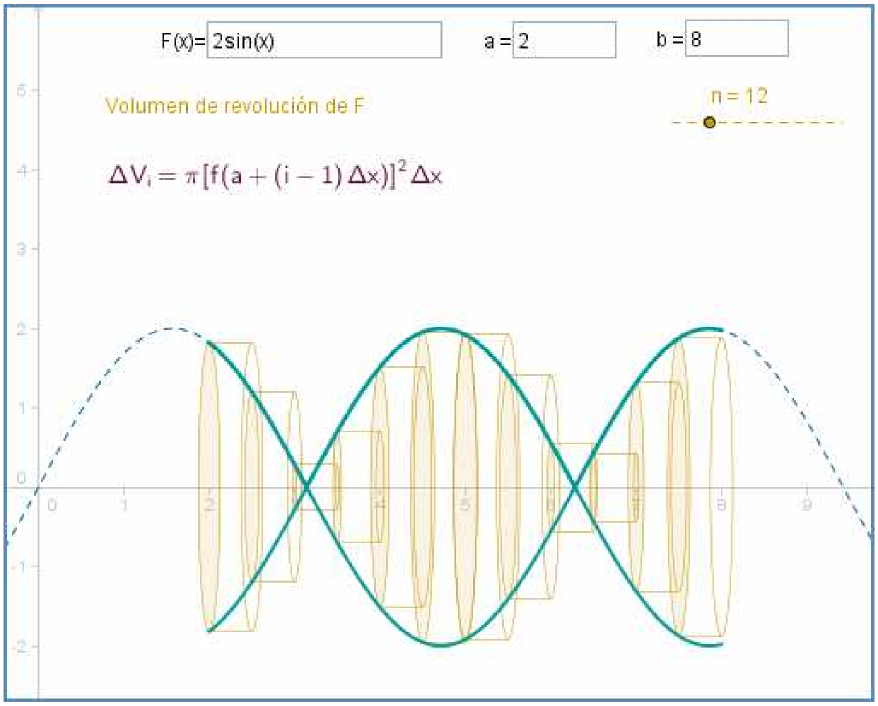
$$\text{volumen total} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \simeq \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\Delta y_i$$

El segundo sumatorio es la suma de Riemann de la función $A(y)$ en $[a, b]$. Si converge para $n \longrightarrow \infty$, lo hace a la integral

$$\text{Volumen} = \int_a^b A(y)\, dy \tag{2}$$

Ejemplo: Volumen de un sólido de revolución

Si consideramos que el sólido se genera al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje X estando limitado por $x = a$ y $x = b$ el volumen del sólido será: $V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2 dx$



Material interactivo

- Ejercicio: Volumen de sección conocida. Ejemplo 1
- Ejercicio: Volumen de sección conocida. Ejemplo 2