



TEMA Integración de funciones de una variable

Aplicaciones: áreas

Pensamos aquí en una región del plano encerrada por una curva. El área de esa región puede calcularse mediante integral definida; la expresión de esa integral depende de cómo venga dada la curva.

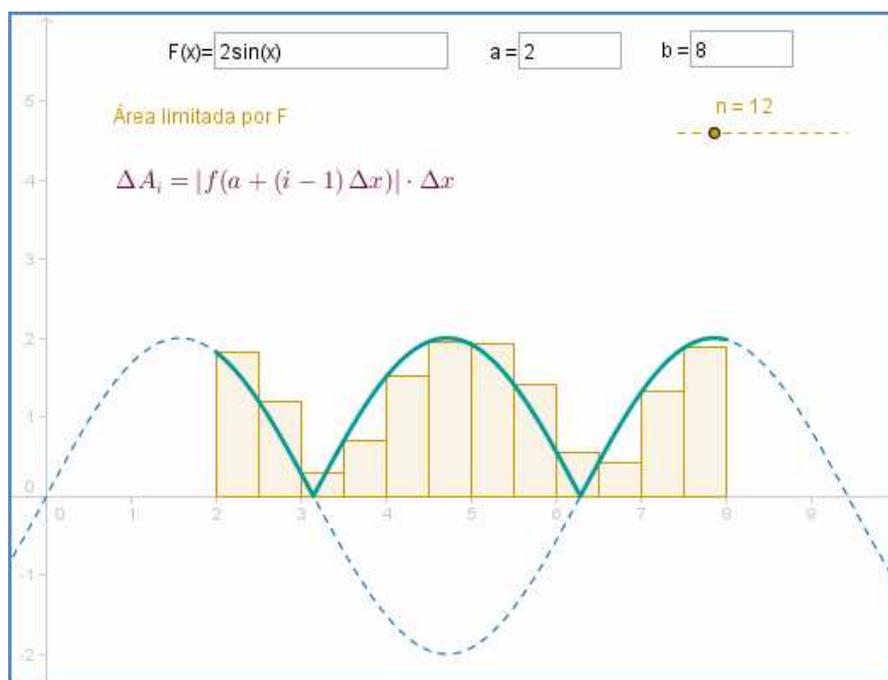
Curva en explícitas cartesianas

- El área limitada entre $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x)| dx \quad (1)$$

- El área limitada entre dos gráficas, sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Curva en paramétricas

- Si la curva C viene dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ e $y = y(t)$ con $t \in [t_1, t_2]$
 - El área limitada entre C y el eje OX es

$$\text{Área} = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)| dt$$

- El área limitada entre C y el eje OY es

$$\text{Área} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)y'(t)| dt$$

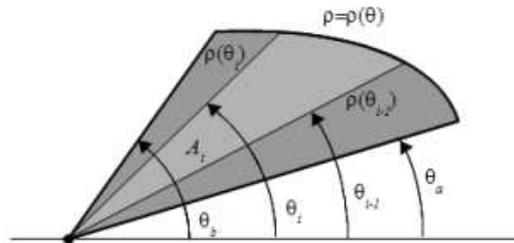
Estas fórmulas se obtienen de hacer un cambio de variable apropiado en (1)

Curva en polares

- El área encerrada por la curva $r = r(\theta)$ para $\theta \in [\theta_a, \theta_b]$ es

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} r(\theta)^2 d\theta \quad (2)$$

Esta fórmula se obtiene de considerar una partición del intervalo $[\theta_a, \theta_b]$, y en cada subregión tomar como área aproximada el área de un sector circular: si el subintervalo es $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ el sector aproximante tendrá ángulo igual a $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ y como radio se tomará un $r = r(c_i)$ siendo c_i cualquiera del subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$; por tanto su área es $r(c_i)\Delta\theta_i/2$; sumando todas estas áreas y haciendo tender la norma de la partición a cero obtendremos la expresión anterior.



Material interactivo

- Curvas en cartesianas

- Área encerrada por dos curvas. Ejemplo 1
- Área encerrada por dos curvas. Ejemplo 2
- Curvas en paramétricas
 - Laboratorio curvas en paramétricas
 - Área encerrada por una elipse
 - Área encerrada por la cicloide
- Curvas en polares
 - Laboratorio curvas en polares
 - Ejercicio: Área común a dos círculos
 - Ejercicio: Área encerradas en la cardioide
 - Propiedades de una espiral

