Elemento diferencial de superficie

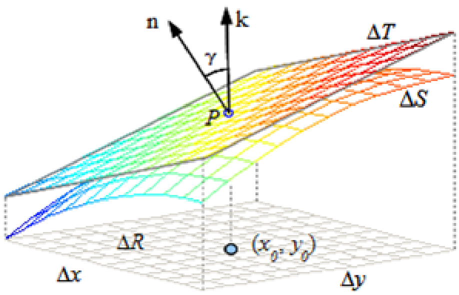
Definición: La superficie S es suave si es la imagen de una función de clase C^1 definida en un dominio D

Veamos cómo se puede obtener el diferencial de superficie según venga definida la superficie S.

Superficie dada por $z = f(x,y)$

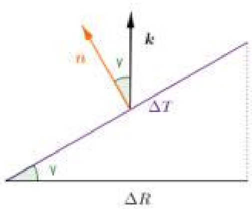
Tomamos la superficie S imagen de $z = f(x,y)$, con $f(x,y)$ de clase C^1. El objetivo es encontrar una aproximación del área de S que se proyecta sobre un rectángulo dado. Las dimensiones de ese rectángulo, que llamaremos ΔR, son Δx y Δy.

Puesto que la superficie más parecida a S es su plano tangente, lo utilizaremos en esta aproximación. Tomaremos el plano tangente que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y de él recortaremos la porción que se proyecta sobre el rectángulo ΔR.



Considerando $\mathbf{n}$, el vector normal unitario a la superficie en el punto P, y γ, el ángulo entre los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{k}$, se cumple:

$$\Delta T = \frac{1}{|\cos\gamma|}\Delta R$$



Como un vector normal a la superficie S en P es $\mathbf{N} = \left(-f'_x(x_o, y_o), -f'_y(x_o, y_o), 1\right)$, podemos escribir

$$|\cos\gamma| = |\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}| = \frac{1}{|\mathbf{N}|}$$

luego

$$\Delta T = |\mathbf{N}|\,\Delta R \; = \sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1}\;\Delta x\,\Delta y$$

Cuando las dimensiones de ΔR tiendan a cero, ΔT tenderá al llamado elemento diferencial de superficie:

$$dS = \sqrt{f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + 1}\,dx\,dy$$

Superficie dada por $F(x,y,z) = 0$

Si la superficie viene expresada por una función implícita, $F(x,y,z) = 0$, con F de clase C^1 siendo $F'_z \neq 0$, el vector normal en cada punto es

$$\mathbf{N} = \left(\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{F'_y}{F'_z}, 1\right)$$

El elemento diferencial de superficie es:

$$dS = \frac{\sqrt{F'^{\,2}_x + F'^{\,2}_y + F'^{\,2}_z}}{|F'_z|}\,dx\,dy$$

Superficie dada en paramétricas

Si la superficie viene expresada por la imagen de unas ecuaciones paramétricas:

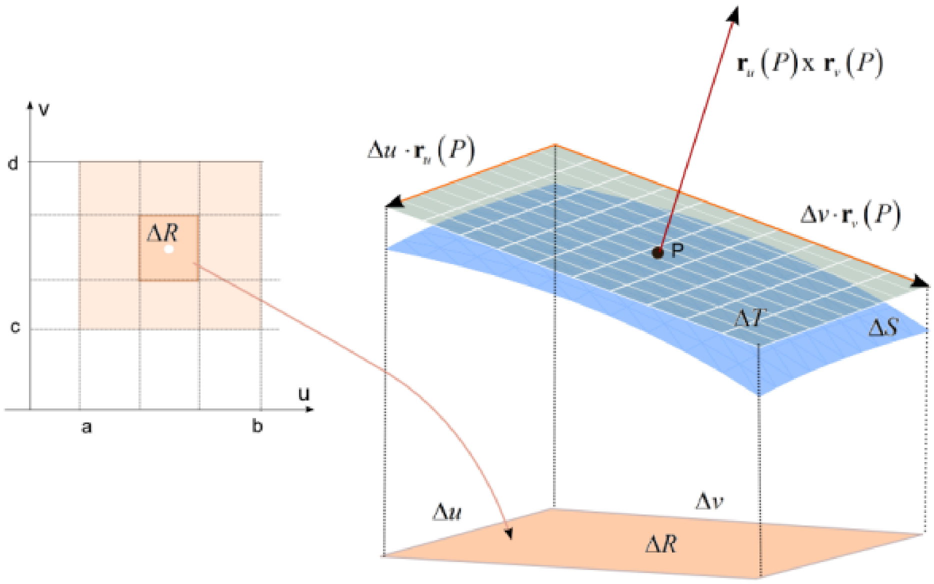
$$\mathbf{r}(u,v):\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in R$$

los dos vectores tangentes a la superficie por el punto $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ son

$$\mathbf{r_u} = (x'_u(u,v), y'_u(u,v), z'_u(u,v)) \quad \text{y} \quad \mathbf{r_v} = (x'_v(u,v), y'_v(u,v), z'_v(u,v))$$

y el vector normal es

$$\mathbf{N} = \mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}$$



El área de la porción de plano tangente que se proyecta en ΔR es

$$\Delta T = |\mathbf{r_u}(P) \times \mathbf{r_v}(P)|\,\Delta u\,\Delta v$$

Cuando $\Delta u \to 0$ y $\Delta v \to 0$, entonces $\Delta T \to dS$, por lo que la expresión para el diferencial de superficie es

$$dS = |\mathbf{r_u} \times \mathbf{r_v}|\,du\,dv$$