Integral triple sobre cajas

Definición (Caja y Partición).-

● Caja del espacio R^3 es el conjunto

$$H=[a,b]\times[c,d]\times[e,j]=\{(x,y,z)/a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d,\ e\leq z\leq j\}$$

● Partición P de una caja H es el conjunto de subcajas generadas al tomar una partición en $[a,b]$, otra en $[c,d]$ y otra en $[e,j]$. Si hay n subcajas y cada una de ellas se denota por H_k, tendremos

$$H=\bigcup_{k=1}^{n}H_k$$

● Llamaremos norma de la partición, y la designaremos por $\|H\|$ a la longitud de la diagonal más larga de las subcajas de la partición de H.

Definición (Suma de Riemann).- Llamaremos suma de Riemann de la función $f(x,y,z)$ definida en la caja H para la partición $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ a la suma,

$$\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$$

donde (x_k,y_k,z_k) es un punto cualquiera tomado en la subcaja H_k y ΔV_k es el volumen de H_k.

Definición (Integral triple)).- Sea f una función de tres variables definida sobre una caja H. Si para toda partición de H, tal que la norma de la partición tiende a cero, existe el límite

$$\lim_{\substack{\|H\|\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$$

se dice que f es integrable en H. Además el valor de éste límite es la integral triple de f sobre H y se denota por

$$\iiint_H f(x,y,z)dV=\lim_{\substack{\|H\|\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$$