Integral triple sobre dominios regulares

Una función $f(x,y,z)$ es integrable en un conjunto $V \subset R^3$ si lo es en una caja que contenga a V.

La definición, las condiciones de existencia y las propiedades de la integral triple sobre cajas recogidas en el apartado anterior, son aplicables a la integral triple sobre dominios regulares sin más que sustituir H por V.

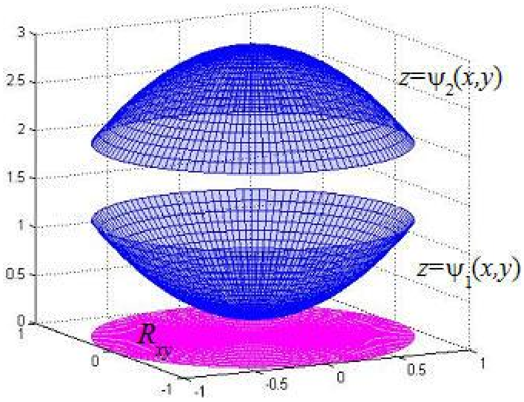
Existen tres tipos de dominios regulares en R^3 : x-simple, y-simple, z-simple. Un dominio puede ser de los tres tipos simultáneamente.

Se describe el proceso de cálculo para el caso de dominio z-simple, los restantes casos se deducen de éste sin dificultad.

Definición (Dominio regular z-simple).- Un conjunto H del espacio es z-simple si se puede escribir como,

$$H = \{(x,y,z)/\ (x,y) \in R_{xy},\ \ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$$

siendo además R_{xy} un dominio regular del plano XY.



Definición (Integrales iteradas sobre un dominio regular z-simple).- Si un conjunto H del espacio es z-simple y la función $f(x,y,z)$ es integrable en H, entonces

$$\int\int\int_H f(x,y,z)\,dV = \int\int_{R_{xy}} \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

Si además,

$$R_{xy} = \{(x,y)/a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

la integral anterior es

$$\int\int\int_H f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Según sea la forma de H y de f, puede ser recomendable utilizar otro orden de integración.