

Cálculo. Integrales iteradas

En la práctica una integral triple se calcula mediante tres integrales simples llamadas integrales iteradas.

Definición (Integrales iteradas). Si f es integrable en $H = [a, b] \times [c, d] \times [e, j]$,

$$\int \int \int_H f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^j f(x, y, z) dz dy dx$$

La expresión de la derecha representa el proceso que comienza integrando la función f respecto de z , tomando x e y como constantes, resultando una función de dos variables. La integración iterada de esa función, primero respecto de y y luego respecto de x da como resultado el valor de la integral triple. Este orden de integración es el expresado en la integral anterior, pero podríamos intercambiar las variables:

- El cálculo de una integral triple se reduce a calcular una integral simple y una doble. Una vez elegida la variable para la primera integración, la integral doble se extenderá al dominio contenido en el plano de las otras variables; podemos escribir

$$\int \int \int_H f(x, y, z) dV = \int \int_{[a, b] \times [c, d]} \left[\int_e^j f(x, y, z) dz \right] dA$$

$$\int \int \int_H f(x, y, z) dV = \int \int_{[a, b] \times [e, j]} \left[\int_c^d f(x, y, z) dy \right] dA$$

$$\int \int \int_H f(x, y, z) dV = \int \int_{[c, d] \times [e, j]} \left[\int_a^b f(x, y, z) dx \right] dA$$

- b) Existen seis órdenes distintos de integración, pues cada una de las expresiones anteriores origina dos formas de resolver las correspondientes integrales dobles.