

Cambio de variables



TEOREMA (Cambio de variable en una integral doble).

Hipótesis:

- las regiones R y D de los planos XY y ST respectivamente, están relacionadas por las ecuaciones

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t)$$

- esa relación entre R y D es biyectiva (cada punto de R es imagen de uno y sólo un punto de D).
- las funciones del cambio, $x(s, t)$ e $y(s, t)$, admiten derivadas parciales continuas en D .
- la función es continua en la región R .

Tesis:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(s, t), y(s, t)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| ds dt$$

siendo,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} x'_s & x'_t \\ y'_s & y'_t \end{vmatrix}$$

OBSERVACIONES

- El factor $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ se llama **jacobiano del cambio**
- El valor absoluto del jacobiano da la relación entre un elemento diferencial de área del plano XY y un elemento diferencial del plano ST :

$$dx dy = |J| ds dt$$

Puesto que tanto $dx dy$ como $ds dt$ son positivos, el cociente entre ellos es positivo: recuerda que el jacobiano siempre se introduce en la integral en valor absoluto.

- Si el cambio de variables fuera el inverso, es decir, el que escribe las coordenadas s y t en función de x e y , entonces el jacobiano sería el inverso, es decir

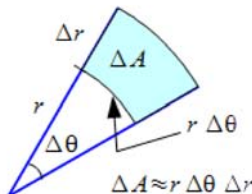
$$\frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}}$$

Cambio de coordenadas a polares

Este es uno de los cambios de variables más habituales. Las fórmulas del cambio son

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

establecidas de forma biyectiva entre dos conjuntos S y R , siendo r positiva.



El jacobiano es

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Resultando,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

