Universidad de la Frontera
Departamento de Matemática y Estadística
Clínica de Matemática

3

Inecuaciones

J. Labrin - G.Riquelme

1. Encuentre el conjunto solución:
$$x+1 \leq \sqrt[3]{x^3-x-2}$$

Solución

Primero que todo elevamos al cubo y resolvemos el producto notable que nos resulta, al lado derecho dejamos la expresión en cero y calculamos el discriminante de la expresión resultante al lado izquierdo.

$$\begin{aligned} x+1 \leq \sqrt[3]{x^3-x-2}/()^3 \quad &\Rightarrow \quad (x+1)^3 \leq x^3-x-2 \\ &\Rightarrow \quad x^3+3x^2+3x+1 \leq x^3-x-2 \\ &\Rightarrow \quad 3x^2+4x+3 \leq 0 \end{aligned}$$

Calculamos el disciminante: $\triangle = -5 \wedge c = 3$, como $\triangle < 0$ y $c > 0$ la solución es $\emptyset$

2. Resuelva
$$\sqrt{5(x-2)} - \sqrt{x-6} < 28\sqrt{x+3}$$

Solución

Restricciones: Recordar que no hay solución a la raiz cuadrada de un número negativo, por tanto estos deben ser mayor o igual a cero.

- $5(x-2) \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, \infty[$
- $x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6 \Rightarrow x \in [6, \infty[$
- $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, \infty[$

$\therefore$ La solución es la intersección de los intervalos $[-3, \infty[$, $[2, \infty[$ y $[6, \infty[$, luego la solución es: $[6, \infty[$

3. Resuelva:
$$\frac{x-10}{4} - \frac{2x+4}{5} < \frac{x+1}{3}$$

Solución

Multiplicamos por los denominadores para eliminarlos y posteriormente resolvemos.

$$\begin{aligned} \frac{x-10}{4} - \frac{2x+4}{5} < \frac{x+1}{3} / \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \quad &\Rightarrow \quad 15(x-10) - 12(2x+4) < 20(x+1) \\ &\Rightarrow \quad 15x - 150 - 24x - 48 < 20x + 20 \end{aligned}$$

A continuación sumamos $24x$, $-15x$ y -20 a ambos lados, lo que nos queda:

$$\Rightarrow \quad -150 - 48 - 20 < 20x24x - 15x$$

Factorizamos por x como también por $-$, posteriormente multiplicamos por $\frac{1}{29}$, quedando:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -(150+48+20) < (20+24-15)x \\ &\Rightarrow \quad -218 < 29x / \cdot \frac{1}{29} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{218}{29} < x \end{aligned}$$

El resultado final se observa en la siguiente imagen (Figura 3) y podemos observar que el conjunto solución no contempla $-\frac{218}{29}$, puesto que x debe ser mayor a éste.

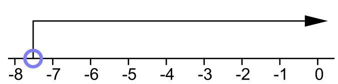

Figura 3.1:

Finalmente diremos que la solución es:

$$\therefore \text{Sol: } \left] -\frac{218}{29}, \infty \right]$$

4. Resuelva:

$$4x^2 - 5x - 6 < 0$$

Solución

Observamos que $4x^2 - 5x - 6$ se puede factorizar, quedando:

$$4x^2 - 5x - 6 < 0 \Rightarrow (4x+3)(x-2) < 0$$

A continuación calculamos los puntos críticos los cuales nos sirven para obtener el intervalo solución.

Puntos Críticos:

- $4x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{4}$
- $x=2$

Podemos notar que la restricción que tiene nuestro ejercicio original es que debe ser menor a cero (<0), por lo tanto el resultado de nuestro conjunto solución debe ser negativo, tal y como se aprecia en el siguiente cuadro:

Intervalos	$-\infty,-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4},2$	$2,\infty$
$4x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$
Resultado	$+$	$-$	$+$

Luego la solución final es:

$$\therefore \text{Sol: } \left]-\frac{3}{4},2\right[$$

5. Resuelva

$$\frac{x-3}{x-1}+\frac{10}{x}\leq\frac{x+5}{x-3}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x-3}{x-1}+\frac{10}{x} &\leq \frac{x+5}{x-3}\\
\frac{x-3}{x-1}+\frac{10}{x}-\frac{x+5}{x-3} &\leq 0\\
\frac{x(x-3)^2+10(x-1)(x-3)-x(x-1)(x+5)}{x(x-1)(x-3)} &\leq 0\\
\frac{x^3-6x^2+9x+10x^2-40x+30-x^3-4x^2+5x}{x(x-1)(x-3)} &\leq 0\\
\frac{-26x+30}{x(x-1)(x-3)} &\leq 0
\end{aligned}$$

Luego los puntos críÂticos son $x=/\frac{15}{13},0,1,3/$ y la solución es:

$$S:(-\infty,0)\cup(1\frac{15}{3}]\cup(3,\infty)$$

6. Encuentre el conjunto solución:

$$x>\frac{1}{x}$$

Solución

Sumamos $-\frac{1}{x}$ a ambos lados de tal forma que al lado derecho de nuestra inecuación quede cero, posteriormente asociamos lo que nos quede al lado izquierdo, tal y como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned}
x>\frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad x-\frac{1}{x}>0\\
&\Rightarrow \quad \frac{x^2-1}{x}>0\\
&\Rightarrow \quad \frac{(x+1)(x-1)}{x}>0
\end{aligned}$$

Puntos Críticos:

- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
- $x = 0$

Intervalos	$-\infty, -1$	$-1, 0$	$0, 1$	$1, \infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
Resultado	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego la solución es:

$$\therefore \text{Sol: }]-1, 0[\cup]1, \infty[$$

7. Encuentre el Conjunto solución:

$$\frac{(x-4)^2(9-4x^2)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+4)(x^2-x+1)} \geq 0$$

Solución

$$\frac{(x-4)^2(9-4x^2)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+4)(x^2-x+1)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-4)^2(3-2x)(3+2x)}{\frac{1}{2}(2x+3)(x+4)(x^2-x+1)} \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{2(x-4)^2(3-2x)}{(x+4)(x^2-x+1)} \geq 0, x \neq -\frac{3}{2} (*)$$

Como:

- $(x-4)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2 - x + 1$ Siempre es positiva, pues $\triangle = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$ y $a = 1 > 0$

Luego se tiene que $(*)$ es equivalente a: $\dfrac{2(3-2x)}{x+4} \geq 0, x \neq -\dfrac{3}{2} \wedge x = 4 \in$ Sol.

Puntos Críticos:

- $2(3-2x) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$
- $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

Intervalos	$-\infty, -4$	$-4, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \infty$
$2(3-2x)$	$+$	$+$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
Resultado	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \text{Sol: } \left]-4, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup \{4\}$$

8. Resolver

$$\frac{\sqrt{(x-2)^4}\cdot(x^2-3)}{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)} \leq 0$$

Solución

$$\frac{\sqrt{(x-2)^4}\cdot(x^2-3)}{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)} \leq 0$$
$$\frac{(x-2)^2\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})}{(x-1)^2\cdot(x^2+x+1)} \leq 0$$

Restricciones:

- $x \neq 1$
- $\sqrt{(x-2)^4} \geq 0 \Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$
- x^2+x+1 siempre es positiva, pues $\triangle = 1-4\cdot 1\cdot 1 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2-3 \leq 0 \vee |x|^2 \leq 3 \vee -|x| \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

Luego la solución es:

$$[-\sqrt{3}, 1[\cup]1, \sqrt{3}] \cup \{2\}$$

9. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2-2x}{x^2-5x+6} - \frac{x^2-4}{x^2+4x+4} < 1$$

Solución

$$\frac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} - \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+2)} - 1 < 0$$
$$\frac{x}{x-3} - \frac{x-2}{x+2} - 1 < 0$$
$$\frac{x(x+2)-(x-2)(x-3)-(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)} < 0$$
$$\frac{x^2+2x-x^2+5x-6-x^2+x+6}{(x-3)(x+2)} < 0$$
$$\frac{-x^2+8x}{(x-3)(x+2)} < 0$$
$$\frac{-x(x-8)}{(x-3)(x+2)} < 0$$

Luego la solución es:

$$\therefore x < -2,\ 0 < x < 3,\ x > 8$$

10. Resolver

$$1 + \frac{6}{x^2+3x+2} > \frac{6}{x+2}$$

Solución

Debemos dejar nustra inecuación mayor que cero, y posteriormente hacemos una sola fracción.

$$
\begin{aligned}
1+\frac{6}{x^2+3x+2} > \frac{6}{x+2} / -\frac{6}{x+2} &\Rightarrow 1+\frac{6}{x^2+3x+2}-\frac{6}{x+2} \\
&\Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)+6-6(x+1)}{(x+2)(x+1)} > 0 \\
&\Rightarrow \frac{x^2+3x+2+6-6x-6}{(x+2)(x+1)} > 0 \\
&\Rightarrow \frac{x^2-3x+2}{(x+2)(x+1)} \\
&\Rightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-1)}
\end{aligned}
$$

Calculando Puntos Críticos:

- $x+1>0 \Rightarrow x>-1$
- $x+2>0 \Rightarrow x>-2$
- $x-1>0 \Rightarrow x>1$
- $x+2>0 \Rightarrow x>2$

Las soluciones se pueden observar en la siguiente imagen (Figura 5): Entonces el conjunto solución es:

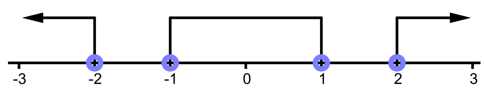

Figura 3.2:

$$]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]1,\infty[$$