Universidad de la Frontera
Departamento de Matemática y Estadística
Clínica de Matemática

4

Inecuaciones con Valor Absoluto

J. Labrin - G.Riquelme

Propiedades de Valor Absoluto:

1. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
2. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$
4. $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k, k \geq 0$
5. $|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \vee x \geq k, k \geq 0$

1. Resolver la siguiente inecuación:

$$|x-1| \leq 3$$

Solución

$$\begin{aligned} |x-1| \leq 3 &\Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 / +1 && \text{por propiedad (4)} \\ &\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4 \\ &\Rightarrow \text{solución: } [-2, 4] \end{aligned}$$

2. Resolver la inecuación:

$$|2x+4| \geq 6$$

Solución

$$\begin{aligned} |2x+4| \geq 6 &\Rightarrow 2x+4 \leq -6 \ \vee \ 2x+4 \geq 6 && \text{por propiedad (5)} \\ &\Rightarrow x+2 \leq -3 \ \vee \ x+2 \geq 3 && \text{factorizando y simplificando} \\ &\Rightarrow x \leq -5 \ \vee \ x \geq 1 \end{aligned}$$

Como x es menor o igual que -5 o x es meyor o igual que 1, el conjunto solución estará dado por la unión de estos intervalos (tal y como se aprecia en la Figura 1)

Luego el conjunto solución será: $]-\infty, -5] \cup [1, \infty[$

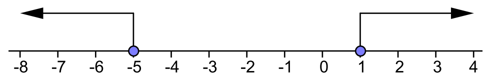

Figura 4.1:

3. Resuelva:
$$|x^2+3| \geq 5$$

Solución

$$\begin{aligned} |x^2+3| \geq 5 &\Rightarrow x^2+3 \leq -5 \ \vee \ x^2+3 \geq 5 && \text{por propiedad (5)} \\ &\Rightarrow x^2 \leq -8 \ \vee \ x^2 \geq 2 \\ &\Rightarrow x^2 \leq -8/8 \ \vee \ |x| \geq \sqrt{2} \\ &\Rightarrow x^2+8 \leq 0 \ \vee \ x^2 \geq 2 \end{aligned}$$

Observamos que $x^2+8=0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, es decir su solución es $\emptyset$, para el segundo caso se tiene:
$$x^2 \geq 2 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2} \Rightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$$
Luego el conjunto solución se observa en la siguiente imagen (Figura 2)

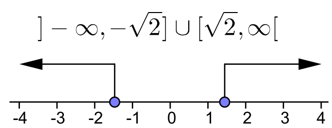

Figura 4.2:

4. Resuelva la siguiente inecuación:
$$\left|\frac{x}{2}+7\right| \geq 2$$

Solución

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{2}+7\right| \geq 2 &\Rightarrow \frac{x}{2}+7 \leq -2 \vee \frac{x}{2}+7 \geq 2 && \text{Por propiedad (5)} \\ &\Rightarrow \frac{x}{2} \leq -9 \vee \frac{x}{2} \geq -5 && \text{multiplicamos por 2} \\ &\Rightarrow x \leq -18 \vee x \geq -10 \end{aligned}$$

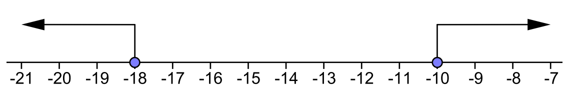

Figura 4.3:

El conjunto solución se observa en la figura anterior (Figura 4), de ahí podemos asegurar que la solución final será:

$$\therefore \text{Sol:}]-\infty,-18] \cup [-10,\infty[$$

5. Resuelve las siguiente ecuación con valor absoluto:

$$|x-1|+|4-2x|=4$$

$\boxed{\text{Solución}}$

Vemos que los valores que anulan el valor absoluto son $x=1$ y $x=2$, luego debemos resolver la ecuación para los siguientes intervalos:

- $(-\infty,1)$

$$\begin{aligned} -x+1+4-2x &= 4 \\ -3x &= -1 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- $(1,2)$

$$\begin{aligned} x-1+4-2x &= 4 \\ -x &= 1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

  Esta solución no pertenece al intervalo, por lo cual se descarta

- $(2,\infty)$

$$\begin{aligned} x-1-4+2x &= 4 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Luego las soluciones son $x=3,\ x=\frac{1}{3}$

6. Resuelva la siguiente inecuación:

$$|x-1|<2|x-3|$$

$\boxed{\text{Solución}}$

Primero que todo elevamos al cuadrado para eliminar el Valor Absoluto, desarrollamos algebraicamente de tal modo que al lado derecho de nuestra inecuación nos resulte 0, tal y como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned} |x-1|<2|x-3|/()^2 &\Rightarrow (x-1)^2<4(x-3)^2 \\ &\Rightarrow x^2-2x+1<4(x^2-6x+9) \\ &\Rightarrow x^2-2x+1<4x^2-24x+36 \\ &\Rightarrow 3x^2-22x+35>0 \\ &\Rightarrow (3x-7)(x-5)>0 \end{aligned}$$

Puntos Críticos:

- $3x-7=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{3}$
- $x-5=0 \Rightarrow x=5$

Como nuestro ejercicio es mayor a cero, las soluciones a encontrar son todas aquellas positivas, para ello realizamos el siguiente cuadro:

Intervalos	$-\infty,-4$	$-4,\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2},\infty$
$3x-7$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
Resultado	$+$	$-$	$+$

Luego el conjunto solución está dado por:

$$\therefore \text{Sol: } \left]-\infty,\frac{7}{3}\right[\cup]5,\infty[$$

7. Encuentre el conjunto solución:

$$\left|\frac{x+2}{x-6}\right|-\left|\frac{x-1}{x-3}\right|<0$$

Solución

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+2}{x-6}\right|-\left|\frac{x-1}{x-3}\right|<0 &\Rightarrow \frac{|x+2|}{|x-6|}<\frac{|x-1|}{|x-3|} && \text{Por propiedad (2)}\\
&\Rightarrow |x+2||x-3|<|x-1||x-6|/()^2 && \text{elvamos al cuadrado}\\
&\Rightarrow (x+2)^2(x-3)^2<(x-1)^2(x-6)^2\\
&\Rightarrow (x^2+4x+4)(x^2-6x+9)<(x^2-2x+1)(x^2-12x+36)\\
&\Rightarrow x^4-2x^3-11x^2+12x+36<x^4-14x^3+61x^2-84x+36\\
&\Rightarrow 12x^3-72x^2+96x<0/\cdot\frac{1}{12}\\
&\Rightarrow x^3-6x^2+8x<0\\
&\Rightarrow x(x^2-6x+8)<0\\
&\Rightarrow x(x-2)(x-4)<0
\end{aligned}$$

Puntos Críticos:

- $x=0$
- $x=2$
- $x=4$

Se aprecia que nuestro ejercicio es menor que 0, por lo tanto las soluciones que buscamos son aquellas negativas, como se aprecia en la tabla:

Intervalos	$-\infty,0$	$0,2$	$2,4$	$4,\infty$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
Resultado	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego el conjunto solución es:

$$\therefore \text{Sol:}(]-\infty,0[\cup]2,4[)-\{3\}$$

8. Resuelva la siguiente inecuación con valor absoluto:

$$\left|\frac{3x+12}{x+2}\right| > 1$$

Solución

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3x+12}{x+2}\right| > 1 &\Rightarrow \frac{3x+12}{x+2} < -1 \vee \frac{3x+12}{x+2} > 1 && \text{Por propiedad (5)}\\
&\Rightarrow \frac{3x+12}{x+2} + 1 < 0 \vee \frac{3x+12}{x+2} - 1 > 0\\
&\Rightarrow \frac{3x+12+x+2}{x+2} < 0 \vee \frac{3x+12-x-2}{x+2} > 0\\
&\Rightarrow \frac{4x+14}{x+2} < 0 \vee \frac{2x+10}{x+2} > 0
\end{aligned}$$

Luego la solución es:

$$(-\infty, -5) \cup \left(-\frac{7}{2}, -2\right) \cup (-2, \infty)$$

9. Resuelva la siguiente inecuación:

$$4 - |x| \leq ||2x| - 6|$$

Solución

$$\begin{aligned}
4 - |x| \leq |2x| - 6| &\Leftrightarrow 4 \leq ||2x| - 6| + |x|\\
&\Leftrightarrow 4 \leq 2||x| - 3| + |x|
\end{aligned}$$

Debemos obtener los puntos críticos para saber cuando cambia de signo nuestra inecuación, para ello debemos igualar a cero nuestra incognita.
Puntos Críticos:

- $x = 0$
- $|x| - 3 = 0 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$

Analizamos nuestros puntos críticos y obtenemos el signo que tiene en dicho intervalo, tal y como se aprecia a continuación

Intervalos	$-\infty, -3$	$-3, 0$	$0, 3$	$3, \infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$\|x\| - 3$	$+$	$-$	$-$	$+$
Casos	1	2	3	4

A continuación desarrollamos la inecuación eliminando el valor absoluto, ésto lo hacemos utilizando los resultados arrojados por la tabla anterior e intersectamos la solución que nos dará con el intervalo en el que estamos trabajando.

- Caso 1, $x \in]-\infty,-3]$

$$\begin{aligned} 2\underbrace{||x|-3|}_{+}+\underbrace{|x|}_{-}\geq 4 \quad &\Rightarrow \quad 2(\underbrace{|x|}_{-}-3)+(-x)\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad 2(-x-3)-x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad -2x-6-x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad -10\geq 3x \\ &\Rightarrow \quad x\leq -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Sol}_1 : \left]-\infty,-\frac{10}{3}\right]\cap]-\infty,-3]=\left]-\infty,-\frac{10}{3}\right]$$

- Caso 2, $x \in [-3,0[$

$$\begin{aligned} 2\underbrace{|\underbrace{|x|}_{-}-3|}_{-}+\underbrace{|x|}_{-}\geq 4 \quad &\Rightarrow \quad 2(-(-x-3))+(-x)\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad 2(x+3)-x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad 2x+6-x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad x\geq -2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Sol}_2 : [-3,0[\cap[-2,\infty[=[-2,0[$$

- Caso 3, $x \in [0,3[$

$$\begin{aligned} 2\underbrace{|\underbrace{|x|}_{+}-3|}_{-}+\underbrace{|x|}_{+}\geq 4 \quad &\Rightarrow \quad 2(-(x-3))+x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad -2x+6+x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad 2\geq x \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Sol}_3 : [0,3[\cap]-\infty,2]=[0,2]$$

- Caso 4, $x \in [3,\infty[$

$$\begin{aligned} 2\underbrace{|\underbrace{|x|}_{+}-3|}_{+}+\underbrace{|x|}_{+}\geq 4 \quad &\Rightarrow \quad 2(x-3)+x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad 2x-6+x\geq 4 \\ &\Rightarrow \quad x=\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Sol}_4 : [3,\infty[\cap\left[\frac{10}{3},\infty\right[=\left[\frac{10}{3},\infty\right[$$

Finalmente, el conjunto solución de nuestra inecuación ésta dado por la unión de todas las soluciones anteriores, es decir:

$$\therefore \textsc{Sol}_F : \text{Sol}_1\cup\text{Sol}_2\cup\text{Sol}_3\cup\text{Sol}_4=\left]\infty,-\frac{10}{3}\right]\cup[-2,2]\cup\left[\frac{10}{3},\infty\right[$$

10. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{|x-1|-|2x+3|}{3x-4} \geq 0$$

$\boxed{\text{Solución}}$

Observamos inmediatamente que x debe ser distinto de $\frac{4}{3}$, puesto que si no lo fuera nuestra inecuación se indetermina.

$$\frac{|x-1|-|2x+3|}{3x-4} \geq 0, x \neq \frac{4}{3}$$

Posteriormente calculamos nuestros puntos críticos -al igual que en el ejercicio anterior- para entender cuando cambia de signo y así poder eliminar el valor absoluto.
Puntos Críticos

- $x-1=0 \Rightarrow x=1$
- $2x+3=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}$

Intervalos	$-\infty, -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, 1$	$1, \infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$2x+3$	$-$	$+$	$+$
Casos	1	2	3

Después de analizar en la tabla, eliminamos el valor absoluto de acuerdo a los resultados obtenidos. Cabe destacar que la solución será la intersección entre la solución -valga la redundancia- que obtengamos y el intervalo en el que trabajamos.

- Caso 1, $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[$

$$\begin{aligned}\frac{\overbrace{|x-1|}^{-}-\overbrace{|2x+3|}^{-}}{3x-4} \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{-(x-1)--(2x+3)}{3x-4} \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{-x+1+2x+3}{3x-4} \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{x+4}{3x-4} \geq 0\end{aligned}$$

Puntos Críticos:

- $x+4=0 \Rightarrow x=-4$
- $3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

Intervalos	$-\infty, -4$	$-4, \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}, \infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x-4$	$-$	$-$	$+$
Resultado	$+$	$-$	$+$

$$x \in]-\infty, -4] \cup \left]\frac{4}{3}, \infty\right[$$

$$\therefore \text{Sol}_1 : \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cap \left(]-\infty, -4] \cup \left]\frac{4}{3}, \infty\right[\right) =]-\infty, -4[$$

- Caso 2, $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, 1\right[$

$$\frac{\overbrace{|x-1|}^{-} - \overbrace{|2x+3|}^{+}}{3x-4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-(x-1)-(2x+3)}{3x-4} \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{-x+1-2x-3}{3x-4} \geq 0 / \cdot (-1)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3x+2}{3x-4} \leq 0$$

Puntos Críticos:

- $3x+2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$
- $3x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Intervalos	$-\infty, -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}, \infty$
$3x+2$	$-$	$+$	$+$
$3x-4$	$-$	$-$	$+$
Resultado	$+$	$-$	$+$

$$x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$$

$$\therefore \text{Sol}_2 : \left[-\frac{3}{2}, 1\right[\cap \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[= \left[-\frac{2}{3}, 1\right[$$

- Caso 3, $x \in [1, \infty[$

$$\frac{\overbrace{|x-1|}^{+} - \overbrace{|2x+3|}^{+}}{3x-4} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)-(2x+3)}{3x-4} \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x-1-2x-3}{3x-4} \geq 0 / \cdot (-1)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x+4}{3x-4} \leq 0$$

Puntos Críticos:

- $x+4=0 \Rightarrow x=-4$
- $3x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Intervalos	$-\infty, -4$	$-4, \frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}, \infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x-4$	$-$	$-$	$+$
Resultado	$+$	$-$	$+$

$$x \in \left[-4, \frac{4}{3}\right[$$

$$\therefore \text{Sol}_3 : [1, \infty[\cap \left[-4, \frac{4}{3}\right[= \left[1, \frac{4}{3}\right[$$

Finalmente, la solución a nuestro ejercicio original será:

$$\therefore \textsc{Sol}_F : \text{Sol}_1 \cup \text{Sol}_2 \cup \text{Sol}_3 =]-\infty, -4] \cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right[$$