Universidad de la Frontera
Departamento de Matemática y Estadística
Clínica de Matemática

1

Ecuaciones Algebraicas

J. Labrin - G.Riquelme

Productos Notables:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$

1. Resuelva

$$9x - 12 - (2x + 3) - (3x - 4) = 9$$

Solución

Resolviendo algebraicamente:

$$\begin{aligned} 9x - 12 - (2x + 3) - (3x - 4) &= 9 \\ 9x - 12 - 2x - 3 - 3x + 4 &= 9 / + 12 + 3 - 4 \\ 9x - 2x - 3x &= 9 + 12 + 3 - 4 \\ 4x &= 20 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

2. Encuentre el valor de x

$$(x + 5)(x - 3) = (x - 8)(x + 1)$$

Solución

Multiplicando término a término y posteriormente desarrolando algebraicamente:

$$\begin{aligned} (x + 5)(x - 3) &= (x - 8)(x + 1) \\ x^2 - 3x + 5x - 15 &= x^2 + x - 8x - 8 \\ x^2 + 2x - 15 &= x^2 - 7x - 8 / - x^2 + 7x + 15 \\ 9x &= 7 \\ x &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

3. Resuleva
$$2(3m-1)^2+(3m-1)=1$$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$\begin{aligned} 2(3m-1)^2+(3m-1)&=1 \\ 2(9m^2-6m+1)+3m-1&=1 && \text{por propiedad (1)} \\ 18m^2-12m+2+3m-1&=1 \\ 18m^2-9m+1&=1/-1 \\ 18m^2-9m&=0 \end{aligned}$$

Hemos llegado a la expresión: $18m^2-9m=0$, factorizamos por x y obtendremos dos soluciones:

$$m(18m-9)=0$$

- $m=0$
- $18m-3 \Rightarrow 18m=9 \Rightarrow m=\dfrac{9}{18} \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$

4. Encuentre las soluciones de x
$$u^4+5u^3=-6u^2$$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$\begin{aligned} u^4+5u^3&=-6u^2/+6u^2 \\ u^4+5u^3+6u^2&=0 \\ u^2(u^2+5u+6)&=0 \end{aligned}$$

- $u=0$
- $u^2+5u+6=0 \Rightarrow (u+2)(u+3)=0 \Rightarrow u=-2, u=-3$

5. Resolver la ecuación
$$6x-10=2(4x-6)+10$$

Pasos a seguir:

- Utilizando la propiedad distributiva se tiene
$$6x-10=8x-12+10$$
- Sumamos el inverso aditivo de $8x$ y -10 y reduciendo términos semejante se obtiene
$$-2x=8$$
- Multiplicando por $-\frac{1}{2}$ ambas partes de la igualdad se obtiene
$$x=-4$$

6. Resolvamos la ecuación fraccionaria

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+3}{x-5} = \frac{x^2-3}{x^2-3x-10}, \text{con } x \neq -2 \text{ y } x \neq 5$$

Solución:

Factorizando los denominadores y multiplicando por el MCM que es $(x+2)(x-5)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
(2x-1)(x-5)-(x+3)(x+2) &= x^2-3 \\
2x^2-10x-x+5-x^2-5x-6 &= x^2-3 \\
-16x &= -3-5+6 \\
x &= \frac{-2}{-16} \\
x &= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

7. Resolvamos la siguiente ecuación exponencial:

$$4^{2x-1} = 2^{8-x}$$

Solución

Igualando bases:

$$\begin{aligned}
(2^2)^{2x-1} &= 2^{8-x} \\
2^{2(2x-1)} &= 2^{8-x} \\
2^{4x-2} &= 2^{8-x}
\end{aligned}$$

Luego igualamos los exponentes:

$$\begin{aligned}
4x-2 &= 8-x \\
5x &= 10 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

De este modo la solución es $x = 2$.

8. Resolvamos la siguiente ecuación exponencial :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} = \left(\frac{81}{16}\right)^{-x+5}$$

Solución

Igualando bases usando propiedades de potencias:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} &= \left(\frac{16}{81}\right)^{-1(-x+5)} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} &= \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{4}\right]^{5-x} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^{4x-3} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{4(5-x)}
\end{aligned}$$

Como las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales, de esta manera se obtiene se obtiene:

$$\begin{aligned}
4x-3 &= 20-4x \\
x &= \frac{23}{8}
\end{aligned}$$

9. Resolvamos la siguiente ecuación exponencial :

$$2^{x+1}+2^{x}+2^{x-1}=28$$

Solución

Factorizando por 2^x

$$\begin{aligned}
2\cdot 2^{x}+2^{x}+2^{-1}\cdot 2^{x} &= 28 \\
2^{x}(2+1+2^{-1}) &= 28 \\
2^{x}\cdot\left(\frac{7}{2}\right) &= 28 \\
2^{x} &= 28\cdot\left(\frac{2}{7}\right) \\
2^{x} &= 8 \\
2^{x} &= 2^{3}
\end{aligned}$$

Al igualar bases se tiene que:

$$x=3$$

10. Resolvamos la ecuación exponencial

$$2-3^{-x}+3^{x+1}=0$$

Solución

Ordenando los términos:

$$3\cdot 3^{x}-(3^{x})^{-1}+2=0$$

Hacemos la sustitución $3^x = t$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$

$$2 - \frac{1}{t} + 3t = 0$$

Multiplicando la ecuación anterior por t:

$$\begin{aligned} 2t - 1 + 3t^2 &= 0 \\ (3t-1)(t+1) &= 0 \\ 3t - 1 = 0 &\quad \vee \quad t + 1 = 0 \\ t = \frac{1}{3} &\quad \vee \quad t = -1 \end{aligned}$$

Si $t = -1 \Longrightarrow 3^x = -1 \Longrightarrow$ No existe solución.

11. Resuelva

$$\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31 - 7x}{6x}$$

Solución

Primero multiplicamos por el minimo común múltiplo de los denominadores

$$MCM(2x, 3x, 4x, 3, 6x) = 12x$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} &= \frac{31 - 7x}{6x} \\ 42 - 32 + 27 - 4x &= 62 - 14x \\ 14x - 4x &= 62 - 42 + 32 - 27 \\ 10x &= 25 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

12. Resolveremos la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ aplicando la formula cuadrática y factorizando

Solución

Utilizando la formula, con $a = 1$, $b = -3$ y $c = 2$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - 1}{2}$$

Luego $x_1 = 1 \vee x_2 = 2$

Por otra parte, factorizando:

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x-1=0 \vee x-2=0$$

Luego $x_1=1 \vee x_2=2$

13. Resolvamos la ecuación

$$x^2+5x=0$$

Solución

Factorizando:

$$x(x+5)=0$$

Luego las soluciones son: $x_1=0 \vee x_2=-5$

14. Resolvamos

$$x^2-1=0$$

Solución

Despejando se tiene:

$$x^2=1$$

Luego $x_1=1 \vee x_2=-1$

15. Resolvamos la ecuación

$$2x^2-x+1=0$$

Solución

Usando la formula cuadrática obtenemos

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{4}$$

Por tanto, no tiene solución en el conjunto de los números reales.

16. Determinemos los valores de k para que la ecuación $x^2-3x+2k=0$:

   a) Posea dos soluciones reales distintas,

   b) Posea una solución real de multiplicidad 2

   c) No tenga solución real.

Solución

El discriminante de la ecuación es $\Delta = 9 - 8k$ y por tanto

a) Si $9 - 8k > 0$, $k > \frac{9}{8}$ entonces existen dos soluciones reales distintas.

b) Si $9 - 8k = 0$, $k = \frac{9}{8}$ entonces existe una única solución de multiplicidad 2.

c) Si $9 - 8k < 0$, $k < \frac{9}{8}$ entonces no hay solución real.

$$\text{Si } t = \frac{1}{3} \Longrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = -1$$

Por lo tanto $x = -1$ es solución, en efecto satisface la ecuación original $2 - 3^1 + 3^{-1+1} = 0$

17. En una actividad de finlización de año organizada por una empresa asistió el doble de mujeres que hombres (adultos) y el triple de niños que hombres y mujeres juntos, si el total de personas es de 156 ¿cuantos niños, mujeres y hombres asistieron?

Solución

Sea x el número de hombres, $2x$ el número de mujeres y $9x$ el número de niños. Como la suma de hombres, mujeres y niños es 156, entonces

$$\begin{aligned} x + 2x + 9x &= 156 \\ 12x &= 156 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Por tanto habían 13 hombres, 26 mujeres y 117 niños que en total suman 156.

18. Si dos números suman 11 y su producto entre ellos es 18. ¿Cuáles son los números?

Solución

Sean x e y los números a determinar. Luego se tienen las siguientes ecuaciones

$$x \cdot y = 18 \tag{1.1}$$
$$x + y = 11 \tag{1.2}$$

Despejando la variables y desde la ecuación (2) reemplazando en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} x \cdot (11 - x) &= 18 \\ 11x - x^2 &= 18 \\ 0 &= x^2 - 11x + 18 \\ 0 &= (x - 9)(x - 2) \end{aligned}$$

- Si $x = 9 \Longrightarrow y = 11 - x = 2$

- Si $x = 2 \Longrightarrow y = 11 - x = 9$

Por lo tanto, las soluciones son los números 2 y 9.

19. Un automóvil sale de cierta ciudad a mediodía y se dirige hacia el este a $40Km/h$. A las 13 hrs. sale de la ciudad otro automóvil que viaja en la misma dirección a una velocidad de $50Km/h$. ¿Cuantas horas tarda el segundo vehículo en alcanzar el primero?

Solución

Sea x las horas que demora el segundo vehículo en alcanzar el primero. Como éste viaja a $50Km/h$ la distancia recorrida hasta alcanzar el primer automóvil será $50 \cdot x$.

Ahora bien, como el primer vehículo lleva una hora más de viaje a una velocidad de $40KM/h$, la distancia que recorrió hasta ser alcanzado por el segundo vehículo será $40 \cdot (x + 1)$

Al igualar las distancias llegamos a la ecuación

$$50 \cdot x = 40 \cdot (x + 1)$$

Resolviendo esta ecuación lineal obtenemos que $x = 4$, es decir, el segundo vehículo alcanza al primero 4 horas despues de salir de la ciudad.

20. Angélica tiene un salario base de $\$250000$ semanales. Además recibe una comisión del $12\,\%$ de lo que venda. La semana anterior, sus ingresos totales fueron de $\$520000$ ¿Cuales fueron sus ventas totales durante esa semana?

Solución

Sea x sus ventas totales de la semana. Luego, la comisión que obtuvo la semana anterior fue $0{,}12 \cdot x$ ($12\,\%$ de x). Estableciendo la igualdad

$$250000 + 0{,}12x = 520000$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos que $x = 2250000$ y por tanto Angélica vendió un total de $\$2250000$ la semana anterior.

21. $\sqrt{2x - 5} = 7$

Solución

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2x-5}\right)^2 &= 7^2 \\ 2x - 5 &= 49 \\ 2x &= 54 \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Comprobación: $\sqrt{2 \cdot 27 - 5} = \sqrt{54 - 5} = \sqrt{49} = 7$, finalmente

Sol: $\{7\}$

22. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}=\sqrt{18-x}$

Solución

Resolviendo:

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)^2 &= (\sqrt{18-x})^2 \\
\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x}+(\sqrt{2x})^2 &= (\sqrt{18-x})^2 \\
x+2+2\sqrt{(x+2)x}+2x &= 18-x \\
2\sqrt{(x+2)x} &= 16-4x \\
\sqrt{(x+2)x} &= 8-2x \\
2x^2+4x &= (8-2x)^2 \\
2x^2+4x &= 64-32x+4x^2 \\
2x^2-36x+64 &= 0 \\
x^2-18x+32 &= 0 \\
(x-16)(x-2) &= 0 \\
x=16 \quad &\vee \quad x=2
\end{aligned}$$

Verificando:

- Con $x=16$

$$\begin{aligned}
\sqrt{16+2}+\sqrt{16\cdot 2} &= \sqrt{18-16} \\
\sqrt{18}+\sqrt{42} &= \sqrt{2} \\
3\sqrt{2}+4\sqrt{2} &= \sqrt{2} \\
7\sqrt{2} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

(Contradicción): Por lo tanto $x=16$ no es solución.

- Con $x=2$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+2}+\sqrt{2\cdot 2} &= \sqrt{18-2} \\
\sqrt{4}+\sqrt{4} &= \sqrt{16} \\
2+2 &= 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x=2$ es solución.