Integral de línea de un campo vectorial

La integral del campo $\mathbf{F}$ sobre la curva C es la integral del campo escalar :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde los elementos que intervienen:

- La curva orientada C: tomaremos $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, curva suave ($x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$), que comienza en $A(x(a), y(a), z(a))$ y termina en $B(x(b), y(b), z(b))$. En cada punto de la curva se definen el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ y el vector normal unitario $\mathbf{n}(t)$.
- El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ definido y continuo sobre C. El vector $\mathbf{F}$ en cada punto de la curva tiene dos componentes:
  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} =$ componente tangencial a la curva
  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} =$ componente normal a la curva

Otras expresiones de la integral de línea:
- Si C viene dada por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, se puede expresar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\mathbf{T}(t)|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

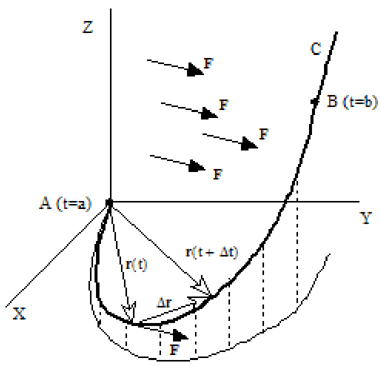
- Tomando $\mathbf{F} = (M, N, P)$ y $d\mathbf{r} = (dx,\ dy,\ dz)$ y haciendo el producto escalar de estos dos vectores se obtiene la forma diferencial de la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

Interpretación física: Trabajo

Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas en el espacio, entonces una partícula que se mueva a lo largo de una curva mientras actúa sobre ella $\mathbf{F}$, realizará un trabajo W. Para calcular este trabajo se hace una partición de la curva C y se calcula el trabajo parcial realizado por $\mathbf{F}$ para mover una partícula sobre un subarco cualquiera de la partición. El trabajo total será la suma de los trabajos sobre todos los subarcos considerados en C.

En la figura se ilustran los elementos que intervienen en este cálculo.



Si la curva viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, conforme t varía sobre un pequeño intervalo, de t a $t + \Delta t$, la partícula se mueve de $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, luego el vector desplazamiento es

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

con lo que es posible calcular el trabajo para ir de $\mathbf{r}(t)$ a $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ por

$$\Delta w = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \Delta\mathbf{r}$$

Si subdividimos el arco AB o curva C en n partes iguales (partición con n subarcos), entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ se puede aproximar por la suma de Riemann

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}(c_k)) \cdot \Delta\mathbf{r} \quad con\ c_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

Cuando $\|C\| \to 0$, $(n \to \infty)$, esta aproximación coincide con el trabajo real realizado por $\mathbf{F}$ al recorrer la trayectoria C, siendo

$$W = \lim_{\substack{\|C\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}(c_k))\Delta\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Algunas aplicaciones

1. **Trabajo**. Ya hemos visto que el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ para desplazar una partícula de masa unidad a lo largo de la curva es la integral de la componente tangencial del campo, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$, sobre la curva, puesto que sólo realiza trabajo la componente tangencial a la curva:

$$Trabajo = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

2. **Circulación**.- Se llama así a la cantidad total de fluido que rodea una curva cerrada C; se calcula con la integral de línea del campo de velocidades, $\mathbf{V}$, del fluido a lo largo de la curva:

$$Circulación = \oint_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

3. **Flujo**.- Para calcular la cantidad de fluido, sujeto al campo de velocidades $\mathbf{V}$, que atraviesa un elemento unidimensional (un alambre, por ejemplo), se integrará la componente de $\mathbf{V}$ normal a la curva que dibuja el alambre, es decir:

$$Flujo = \int_C \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,ds$$