

Teoremas

TEOREMA FUNDAMENTAL DE INTEGRALES DE LÍNEA.- Si f es de clase C^1 en un subconjunto D de R^2 y C es una curva suave en D dada por $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ con $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C \nabla f d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

COROLARIO.- Si f es de clase C^1 en un subconjunto D de R^2 y C es una curva cerrada suave en D , entonces

$$\oint_C \nabla f d\mathbf{r} = 0$$

Es decir, el Teorema Fundamental de integrales de línea establece que para un campo conservativo, el valor de la integral es independiente de la trayectoria o bien, que la integral sobre curvas cerradas sea cero. Para aplicar este teorema se necesita un criterio de evaluación de existencia de gradiente, que se formula en el siguiente teorema.

TEOREMA SOBRE CAMPOS CONSERVATIVOS.-

Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son

- un dominio D simplemente conexo (ver después definiciones) de R^2 o R^3 .
- un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^1 en D .

Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que las siguientes condiciones son equivalentes

- Es nula la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva cerrada suave por partes contenida en D
- La integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas contenidas en D es independiente de la trayectoria, sólo depende de cuáles sean los puntos inicial y final
- El campo $\mathbf{F}$ es conservativo (existe función potencial f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$)
- El rotacional de $\mathbf{F}$ es cero en todos los puntos de D .

IMPORTANTE.- Las cuatro condiciones del teorema de independencia en R^3 , siguen siendo equivalentes aunque el campo vectorial no sea de clase C^1 en un número finito de puntos del dominio en que esté definido, pues siempre podríamos aislar esos puntos excepcionales mediante pequeñas esferas, por ejemplo, y considerar el nuevo dominio resultante, que será simplemente conexo si lo era el inicial.

Definición (Dominio en R^2 o R^3).- Es un subconjunto abierto de R^2 o R^3 (cualquier punto se puede rodear por un círculo o esfera abiertos contenidos en el conjunto) y conexo (cualquier par de puntos del conjunto se pueden unir por una curva toda ella contenida en el conjunto).

Definición (Dominio simplemente conexo en R^2).- Un dominio de R^2 es simplemente conexo si toda curva simple cerrada encierra únicamente puntos del conjunto. Dicho de otro modo, no tiene "agujeros".

Definición (Dominio simplemente conexo en R^3).- Un dominio de R^3 es simplemente conexo si toda curva simple cerrada es la frontera de una superficie suave contenida en el conjunto. Dicho de otro modo, no puede "enhebrarse".