Teorema de Green en el plano

TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO.-

Hipótesis: los elementos que intervienen en este teorema son

- la curva C que es cerrada, simple, suave por partes y orientada positivamente
- la región D del plano encerrada por la curva C
- un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ de clase C^1 sobre y

Tesis: bajo estas hipótesis se verifica que

$$\oint_C M dx + N dy = \int\int_D \left(N'_x - M'_y\right) dA$$

Nota: Una curva es suave por partes si es unión finita de curvas suaves. Una curva está orientada positivamente si se recorre dejando el recinto a su izquierda.
OBSERVACION.- Teniendo en cuenta que el vector tangente y un vector normal unitario a la curva en cada punto son, respectivamente:

$$\mathbf{T} = \frac{\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \quad \mathbf{n} = \pm\frac{\frac{dy}{dt}\mathbf{i} - \frac{dx}{dt}\mathbf{j}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

pueden obtenerse las siguientes expresiones de la tesis del teorema de Green

i) $\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T} ds = \iint\limits_D (\mathrm{rot}\mathbf{F})\mathbf{k}\, dA$

ii) $\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} ds = \iint\limits_D \mathrm{div}\mathbf{F}\, dA$

Estas expresiones constituyen, respectivamente, la tesis del teorema de Stokes en el plano y del teorema de la divergencia de Gauss en el plano.

Aplicación del Teorema de Green al cálculo de un área plana

El área de la región plana D, que es interior a la curva C, se puede calcular mediante la integral de línea:

$$A = \frac{1}{2}\oint\limits_C x dy - y dx$$

El teorema de Green que hemos enunciado se ha establecido para una curva suave C que forma la frontera de la región D del plano. ¿Qué ocurre si la frontera de la región D no es una única curva, sino la unión de varias? ¿Cómo se generaliza el teorema de Green a este tipo de regiones?

TEOREMA DE GREEN GENERALIZADO.- Sean C_0 y C_1 dos curvas simples cerradas orientadas positivamente, suaves por partes tales que no se cortan, estando C_1 encerrada por C_0 . Sea D la región anular entre C_0 y C_1 . Si M y N son funciones de clase C^1 en un abierto que contiene a D, entonces

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_{C_0} (M dx + N dy) - \oint\limits_{C_1} (M dx + N dy)$$

La demostración de este teorema se basa en descomponer la región D, como se muestra en la siguient figura, y aplicar el conocido teorema de Green a cada una de las partes.