

Cálculo de la integral de línea de un campo vectorial



Si la curva C viene dada por su ecuación vectorial o por unas ecuaciones paramétricas

Si la curva C viene dada por su ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ o por unas ecuaciones paramétricas: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ con $t \in [a, b]$, la integral se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \int_C Mdx + Ndy + Pdz = \\ &= \int_a^b ((M(x(t), y(t), z(t))x'(t) + (N(x(t), y(t), z(t))y'(t) + (P(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt\end{aligned}$$

Si la curva C viene dada como intersección de dos superficies en cartesianas

Si la curva C viene dada como intersección de dos superficies en cartesianas:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

se intentará parametrizar la curva, escribiendo las variables x , y , z en función de t de forma que se cumplan las ecuaciones de las superficies.

Si no es posible parametrizar, se elegirá una variable independiente entre x , y , z y se pondrán las otras dos variables en función de la elegida, utilizando las ecuaciones de las superficies.

Supongamos que se ha elegido la variable x como independiente. De las ecuaciones de las superficies despejaríamos $y = y(x)$, $z = z(x)$, que sustituidas en la integral de línea conducirían a una integral en la variable x :

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \int_C Mdx + Ndy + Pdz = \\ &= \int_a^b ((M(x, y(x), z(x)) + (N(x, y(x), z(x))y'(x) + (P(x, y(x), z(x))z'(x))dx\end{aligned}$$