Integral de un campo escalar sobre una curva

La integral de línea de un campo escalar en R^2 se representa por $\int_C f(x,y)\,ds$ siendo:

- C una curva plana
- $f(x,y)$ una función continua sobre C
- ds el diferencial de arco

La integral de línea de un campo escalar en R^3 se representa por $\int_C f(x,y,z)\,ds$ siendo:

- C una curva en el espacio
- $f(x,y,z)$ una función continua sobre C
- ds el diferencial de arco

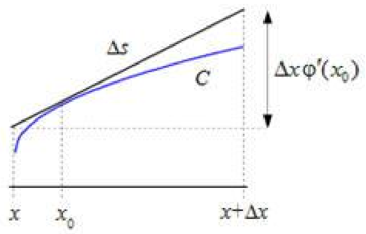
Definición (Diferencial de arco).- Dada una curva C, se llama diferencial de arco a la longitud del arco elemental, que se define como $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, en R^2 y como $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$, en R^3.

Dependiendo de la ecuación de la curva, esta diferencial y la integral de línea toma distintas expresiones.

Curva en cartesianas

Curva plana:

Para la curva C dada por $y=\varphi(x)\ con\ \ x\in[a,b]$, continua con derivada continua, se busca una aproximación (Δs en la figura) para la longitud del arco correspondiente a un cambio (Δx en la figura) en la variable x.



Para ello tomamos un punto x_0 cualquiera entre x y $x+\Delta x$ y trazamos por él la tangente a la curva. La longitud del segmento de tangente que se proyecta sobre $[x,x+\Delta x]$ es Δs y cuando Δx tiende a cero, Δs tiende a ds.

$$\Delta s=\sqrt{1+\varphi'(x_0)^2}\,\Delta x$$

$$ds=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta s=\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx$$

En este caso la integral de línea de la función $f(x,y)$ sobre C es,

$$\int_C f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx$$

Curva en el espacio:

En el caso de que la curva C venga dada como intersección de dos superficies se deberá parametrizar la curva como se indica en el siguiente apartado.

Curva en paramétricas

- En R^2: $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t)),\ t\in[a,b]$, con $x(t)$ e $y(t)$ y derivables con derivada continua. El elemento diferencial de arco es,

$$ds=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=|r'(t)|dt$$

  y la integral de línea de f sobre C es

$$\int_C f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

- En R^3 : $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ t\in[a,b]$, con $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ derivables con derivada continua. El elemento diferencial de arco es,

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = |r'(t)| dt$$

La integral de línea f sobre C es,

$$\int_C f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

En el caso de que la curva C venga dada como intersección de dos superficies

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

se intentará parametrizar la curva. Esto siempre se puede hacer eligiendo una variable independiente entre $x,\ y,\ z$ y poniendo las otras dos variables en función de la elegida, utilizando las ecuaciones de las superficies. Supongamos que se ha elegido la variable x como independiente. De las ecuaciones de las superficies despejaríamos $y = y(x),\ z = z(x)$, que sustituidas en la integral de línea conducirían a una integral en la variable x:

$$\int\limits_C f(x,y,z) ds = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), z(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}\, dx$$

Curva plana en polares

La curva en polares $r = r(\theta),\ \theta \in [\theta_0, \theta_1]$, con r una función continua con derivada continua se puede expresar por las ecuaciones paramétricas

$$x(\theta) = r(\theta) \cos\theta\ ,\ y(\theta) = r(\theta) \operatorname{sen}\theta,\ \theta \in [\theta_0, \theta_1]$$

Aplicando la definición del diferencial de arco para una curva en paramétricas y simplificando, se obtiene que para este caso

$$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$

La integral de línea de f sobre C es,

$$\int\limits_C f(x,y) ds = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\mathrm{sen}\theta) \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, d\theta$$