Interpretación geométrica. Propiedades

Si se consideran una curva plana C y la función continua $z = f(x,y)$ y no negativa sobre C, entonces la integral de sobre C representa el área de la valla o cortina vertical apoyada sobre C y cuya altura en cada punto viene dada por $f(x,y)$.

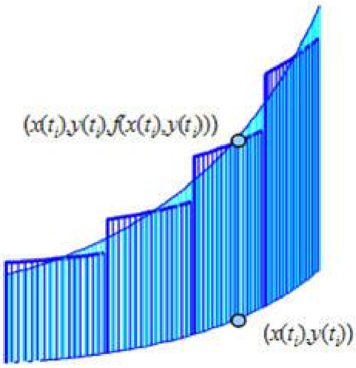

Figura.- Interpretación de la integral de un campo escalar sobre una curva.

JUSTIFICACIÓN

Sean $x = x(t),\ \ y = y(t)$ con unas ecuaciones paramétricas de C. Se divide el intervalo $[a,b]$ en n intervalos (partición de $[a,b]$), lo que también divide el arco en n pequeños subarcos (partición de C). Sobre cada subarco k se toman las siguientes aproximaciones :

- Δs_k como la longitud del subarco
- el valor de f en cualquier punto (x_k, y_k) del subarco.

Con esto, la suma de Riemann de f sobre C

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta s_k$$

aproxima el área de la valla vertical apoyada sobre C, y su límite cuando $\|C\| \to 0$, tiende a la integral de línea cuyo valor será precisamente el área de dicha valla.

$$\acute{A}rea = \lim_{\substack{\|C\|\to 0l \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta s_k = \int_C f(x,y)ds$$

PROPIEDAD P1 (Linealidad).- La integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales.

PROPIEDAD P2 (Aditividad de la curva de integración).- La integral sobre una curva que sea unión de varias es la suma de las integrales sobre cada una de ellas; por ejemplo, para la unión de dos curvas:

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)\,ds = \int_{C_1} f(x,y,z)\,ds + \int_{C_2} f(x,y,z)\,ds$$

PROPIEDAD P3 (Independencia de la parametrización).- El valor de la integral no cambia con la parametrización elegida para la curva.

PROPIEDAD P4 (Independencia de la orientación).- El signo de la integral no cambia con la orientación fijada en la curva.