Operadores vectoriales

Definición (Gradiente).- Es el campo vectorial

$$\mathrm{grad}\,(f(x,y,z)) = \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

IMPORTANTE RECORDAR:

- La relación entre la derivada direccional y el campo gradiente de un campo escalar diferenciable f es: $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u}$ un vector unitario.
- La derivada direccional "mide el cambio de f en la dirección de $\mathbf{u}$.
- La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente.

Definición (Campo vectorial conservativo y función potencial).- $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo si existe un campo escalar f, diferenciable, de forma que

$$\mathbf{F} = \nabla f$$

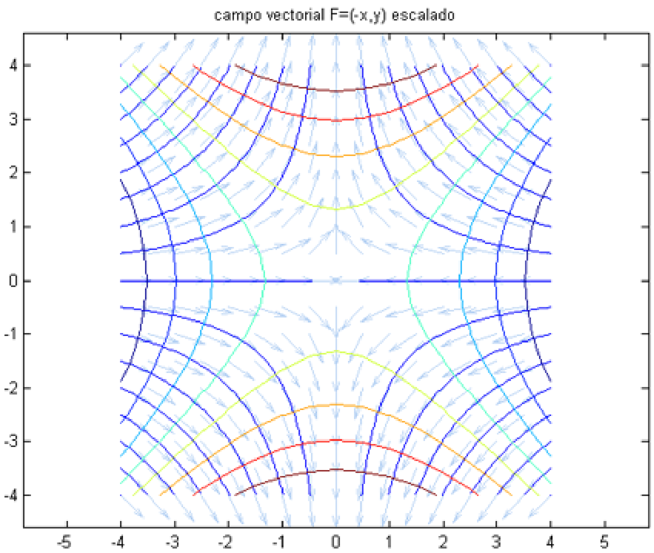
Definición (Líneas equipotenciales).- Sea $\mathbf{F} = \nabla f(x,y)$, siendo $f(x,y)$ diferenciable. Las líneas equipotenciales de $\mathbf{F}$ son las curvas que verifican

$$f(x,y) = C$$

Definición (Superficies equipotenciales).- Sea $\mathbf{F} = \nabla f(x,y,z)$, siendo $f(x,y,z)$ diferenciable. Las superficies equipotenciales de $\mathbf{F}$ son las superficies que verifican

$$f(x,y,z) = C$$

PROPIEDAD: Las líneas equipotenciales y las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de fuerza.



Definición (Divergencia).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\mathrm{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\mathrm{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$.

Definición (Rotacional).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\mathrm{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$.

Definición (Laplaciano).- Es el campo escalar

$$\Delta f(x,y,z) = \mathrm{div}\left(\nabla f(x,y,z)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$$

El laplaciano de f también se denota por $\nabla^2 f$.

Ejercicios interactivos:

- Ejemplo 1